Antônio Sardella
Edison da Matta

Matemática

6ª Série

De acordo com o Guia Curricular do Estado de São Paulo

Caro colega

Temos a satisfação de lhe apresentar este livro de Matemática destinado à 6.ª série do Primeiro Grau. Ao elaborá-lo, tivemos a preocupação de seguir dois critérios que julgamos de fundamental importância para o êxito de qualquer texto didático:

- **Não trazer complicações ao aluno** — Este critério nos levou a escrever o texto numa linguagem simples e direta, por vezes mesmo coloquial, o que, em nosso entender, é fundamental para o entendimento dos assuntos.
- **Ser um auxiliar do professor** — Com a intenção de atender a esta finalidade, a estrutura do livro foi organizada de modo a apresentar a parte teórica de maneira simples, clara e objetiva para, a seguir, explorar exaustivamente essa teoria através de exercícios que vão introduzindo paulatinamente as dificuldades comuns aos nossos alunos. Isso permite uma real e firme fixação dos assuntos estudados.

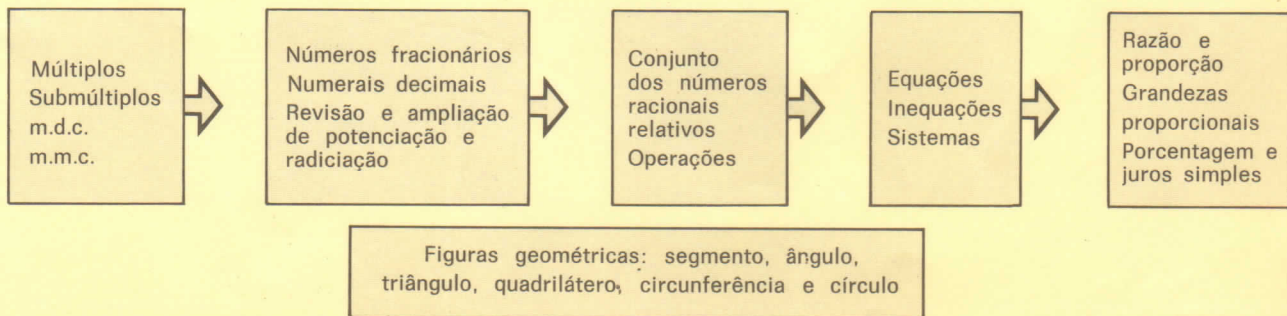
OBJETIVO DESTE LIVRO

Este livro foi elaborado com a finalidade de dar ao aluno, inicialmente, o conhecimento dos conceitos de **múltiplo**, **submúltiplo**, **maior divisor comum** e **menor múltiplo comum**, uma vez que ele já estudou o conjunto dos números naturais.

A seguir, fazemos com que o aluno entre em contato com os **números fracionários** e os **numerais decimais**; e no sentido de prevenir eventuais dificuldades, fazemos uma revisão de **potenciação** e **radiciação**, preparando-o assim para colocá-lo a par do **conjunto dos números racionais relativos**.

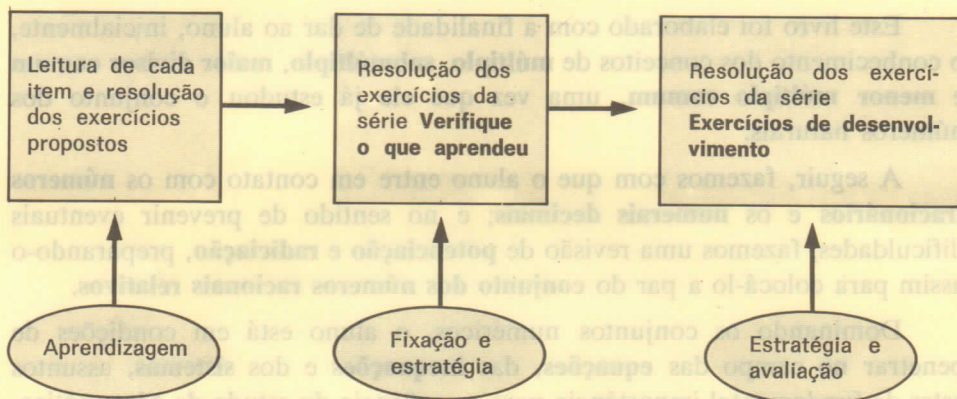
Dominando os conjuntos numéricos, o aluno está em condições de penetrar no campo das **equações**, das **inequações** e dos **sistemas**, assuntos estes de fundamental importância para a seqüência do estudo da Matemática. Finalmente, com o propósito de capacitar o aluno a integrar-se na sociedade em que vive e de fornecer condições de melhor desempenho profissional aos alunos que trabalham, fazemos o estudo de **razão**, **proporção** e **grandezas proporcionais**, para que assim possam ser introduzidas as noções de **porcentagem** e **juros simples**, conhecimentos que serão úteis por toda a vida.

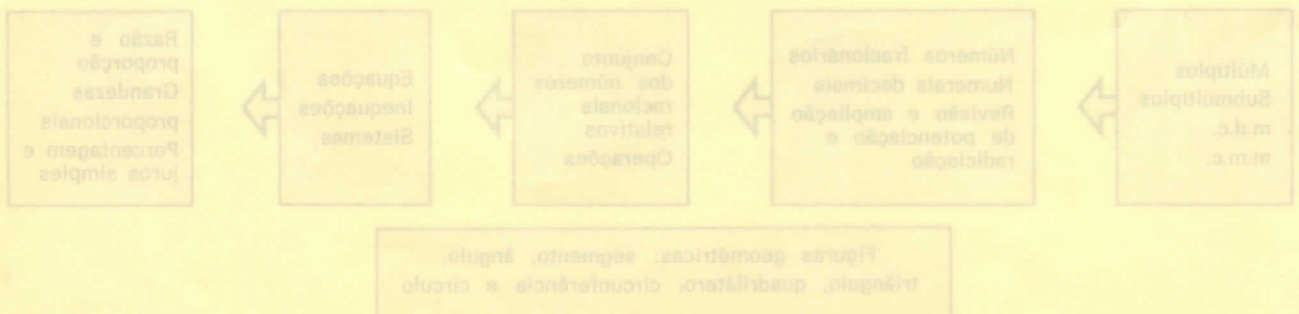
Por fim, preparando o aluno para a 7.ª série, fazemos o estudo de algumas importantes figuras geométricas.

De modo simplificado, assim pode ser visualizada a seqüência proposta no livro:

ESTRUTURA DESTE LIVRO

No sentido de alcançar o objetivo mencionado, todos os itens de cada unidade são seguidos de um grande número de exercícios, que o aluno deverá fazer no próprio livro, sob a orientação do professor. A isso denominamos **fase de aprendizagem**. Para reforçá-la é introduzida, após um determinado número de itens, uma série de exercícios com o nome de **Verifique o que aprendeu**, que constitui a **fase de fixação**. Esta série deve ser aproveitada pelo professor como estratégia para atingir os objetivos específicos propostos.

No final de cada unidade existe uma série de exercícios denominada **Exercícios de desenvolvimento**. Sua finalidade é desenvolver aqüilo que o aluno já aprendeu e fixou. Esta série poderá ser feita em classe ou em casa, dependendo do critério do professor. Por outro lado, ela se presta como material de avaliação da aprendizagem ou como estratégia para atingir os objetivos específicos da unidade.

De maneira esquemática, assim pode ser visualizada a seqüência dos diversos passos que formam a estrutura de cada unidade:

Esperamos com isso prestar uma modesta ajuda aos professores que se dedicam ao importante trabalho do ensino da Matemática. Desejamos que este livro contribua especialmente para despertar no aluno o gosto e o interesse por esta matéria. Que ele ajude o aluno não só a aprender Matemática, mas a aprender a **gostar de estudar Matemática**. E, para que este livro atinja realmente esses objetivos, queremos contar sempre com suas críticas e sugestões.

Os Autores

ANTÔNIO SARDELLA • EDISON DA MATTA

MATEMÁTICA

6ª SÉRIE PRIMEIRO GRAU

DE ACORDO COM O GUIA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO

O PLANEJAMENTO DE CURSO, AS SUGESTÕES DIDÁTICAS E AS RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS NÃO CONSTAM NO LIVRO DO ALUNO.

ÍNDICE

Caro Aluno

Na 5.ª série você fez importantes descobertas no campo da Matemática. Essas descobertas são importantes por dois motivos: primeiro, porque são muito úteis para sua vida; segundo, porque formam uma base para aquilo que vem depois. Por isso, você está de parabéns por ter subido mais esse degrau nos seus estudos.

Na 6.ª série você vai continuar fazendo descobertas tão importantes quanto as anteriores. Com base naquilo que já aprendeu, irá avançar passo a passo na conquista de novos conhecimentos. O trabalho é fácil. Este livro vai ajudá-lo muito. Você irá aprender os assuntos de maneira gradativa, começando com os mais simples até chegar aos mais complexos. E os exercícios foram organizados de tal modo que, através deles, você fixará firmemente os assuntos estudados.

Com a orientação do professor e a ajuda deste livro, você chegará sem dificuldades ao final de mais um ano de estudos.

Bom trabalho!

Os Autores

Unidade 1 — MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS DE UM NÚMERO — A DIVISIBILIDADE

NOÇÃO DE MÚLTIPLO E SUBMÚLTIPLO

Numa divisão exata, (resto zero) ocorre que:

- o dividendo é **múltiplo** do divisor e do quociente;
- o divisor e o quociente são **submúltiplos** do dividendo.

Múltiplo
D | d
zero | q
submúltiplos

VAMOS EXERCITAR:

a) Considere a sentença 30 : 6 = 5. Agora complete:

1) 30 é o dividendo.
2) 6 é o divisor.
3) 5 é o quociente
4) A operação indicada é a divisão exata.
5) 30 recebe o nome de múltiplo de 6 e de 5.
6) 6 e 5 são os submúltiplos de 30.

b) Complete o quadro:

Divisão	Dividendo	Divisor	Quociente	Múltiplo	Submúltiplo
12 : 4 = 3	12	4	3	12	4 e 3
16 : 8 = 2	16	8	2	16	8 e 2
45 : 5 = 9	45	5	9	45	5 e 9
64 : 4 = 16	64	4	16	64	4 e 16
28 : 7 = 4	28	7	4	28	7 e 4
32 : 16 = 2	32	16	2	32	16 e 2

Numa divisão exata é comum dizer que o dividendo é **divisível** pelo divisor.

Então: 12 : 4 = 3 significa que 12 é divisível por 4.

Complete:

1) 18 : 2 = 9 significa que 18 é divisível por 2.
2) 16 : 8 = 2 significa que 16 é divisível por 8.
3) 40 : 5 = 8 significa que 40 é divisível por 5.
4) 24 : 3 = 8 significa que 24 é divisível por 3.
5) 36 : 4 = 9 significa que 36 é divisível por 4.
6) 15 : 5 = 3 significa que 15 é divisível por 5.

COMO OBTER O CONJUNTO DOS MÚLTIPLOS

Para obter o conjunto dos múltiplos de um número basta efetuar as multiplicações do número dado com a sucessão dos números naturais. Vamos tomar como exemplo o conjunto dos múltiplos de 3:

Obtenha o conjunto dos múltiplos dos seguintes números naturais:

1) 2 M(2) = {0, 2, 4, 6, 8, . . . }
2) 5 M(5) = {0, 5, 10, 15, 20, . . . }
3) 7 M(7) = {0, 7, 14, 21, 28, . . . }
4) 9 M(9) = {0, 9, 18, 27, 36, . . . }
5) 15 M(15) = { 0, 15, 30, 45, 60, . . . }
6) 12 M(12) = { 0, 12, 24, 36, 48, . . . }
7) 11 M(11) = { 0, 11, 22, 33, 44, . . . }
8) 10 M(10) = { 0, 10, 20, 30, 40, . . . }

Você deve ter notado que:

- O conjunto dos múltiplos de um número diferente de zero é infinito.
- Todo número é múltiplo de si mesmo.
- Zero é múltiplo de qualquer número.
- Todo número é múltiplo de 1: M(1) = {0, 1, 2, 3, . . .} = ℕ.
- Zero é múltiplo de si mesmo, e é o único M(0) = {0}.

COMO OBTER O CONJUNTO DOS SUBMÚLTIPLOS (DIVISORES)

Para obter o conjunto dos submúltiplos de um número basta verificar quais são os números naturais que são divisores do número dado numa divisão exata. Lembre-se: o **zero** não pode ser divisor.

Vejamos como se obtém o conjunto dos submúltiplos ou divisores de 18:

Obtenha os conjuntos dos divisores:

1) D(8) = {1, 2, 4, 8}
2) D(15) = {1, 3, 5, 15}
3) D(16) = {1, 2, 4, 8, 16}
4) D(30) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
5) D(20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}
6) D(4) = {1, 2, 4}
7) D(28) = {1, 2, 4, 7, 14, 28}
8) D(7) = {1, 7}
9) D(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
10) D(1) = {1}
11) D(0) = {1, 2, 3, 4}

Note que:

- O conjunto dos divisores de um número natural diferente de zero é finito.
- O número 1 é divisor de qualquer número.
- Todo número diferente de zero é divisor de si mesmo.
- Qualquer número diferente de zero é divisor de zero: o conjunto dos divisores de zero é infinito, ou seja, $D(0) = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}^*$.
- O zero não é divisor de nenhum número natural.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Determine os conjuntos indicados e, a seguir, coloque V nas sentenças verdadeiras e F nas falsas:

M(4) = {0, 4, 8, 12, 16, ...}

D(6) = {1, 2, 3, 6}

D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

1) $6 \in M(4)$ (F)	5) $4 \notin D(12)$ (F)	9) $M(4) \supset D(6)$ (F)
2) $8 \in M(4)$ (V)	6) $0 \in M(4)$ (V)	10) $D(12) \cap D(6) = D(6)$ (V)
3) $64 \in M(4)$ (V)	7) $0 \in D(12)$ (F)	11) $D(6) \cup D(12) = M(4)$ (F)
4) $4 \notin D(6)$ (V)	8) $D(6) \subset D(12)$ (V)	12) $M(4) \subset \mathbb{N}$ (V)

b) Determine os elementos dos seguintes conjuntos:

1) {múltiplos de 4 menores que 20} = {0, 4, 8, 12, 16}
2) {múltiplos de 6 maiores que 10 e menores que 40} = {12, 18, 24, 30, 36}
3) {múltiplos de 5 maiores que 5 e menores que 30} = {10, 15, 20, 25}
4) {divisores de 12 maiores que 4} = {6, 12}
5) {divisores de 8 maiores que 1 e menores que 8} = {2, 4}
6) {divisores de 10 menores que 5} = {1, 2}
7) {múltiplos de 8 menores que 30} = {0, 8, 16, 24}
8) {divisores de 15 maiores que 18} = { }
9) {múltiplos de 5 compreendidos entre 12 e 24} = {15, 20}
10) {múltiplos de 9 compreendidos entre 10 e 40} = {18, 27, 36}

DIVISIBILIDADE

Já sabemos que, numa divisão exata, o dividendo é **divisível** pelo divisor.

Veja: 36 : 9 = 4, logo, 36 é divisível por 9.

Muitas vezes o processo normal da divisão é demorado, e, assim, para sabermos se um número natural é divisível por outro, utilizamos certas regras práticas comumente chamadas de **critérios de divisibilidade**.

Divisibilidade por 2: regra do divisor 2

Quando se divide um número natural por 2, o resto da divisão é sempre um elemento do conjunto {0, 1}. Para que o resto seja zero (divisão exata), é preciso que o número seja divisível por 2.

> Um número natural é divisível por 2 quando no seu numeral o algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6 ou 8. Em outras palavras, quando é par.

Exemplos: 136 é divisível por 2; 729 não é divisível por 2.

Coloque S ao lado dos números divisíveis por 2 e N ao lado dos não-divisíveis por 2:

1) 248 S	4) 141 N	7) 1 026 S	10) 35 628 S
2) 592 S	5) 320 S	8) 3 050 S	11) 18 915 N
3) 383 N	6) 984 S	9) 14 727 N	12) 47 129 N

Divisibilidade por 3: regra do divisor 3

Quando se divide um número natural por 3, o resto da divisão é um elemento do conjunto {0, 1, 2}. Para que o resto seja zero é preciso que o número seja divisível por 3.

> Um número natural é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos (VA) dos algarismos de seu numeral é múltiplo de 3: M(3) = {0, 3, 6, 9, . . .}.

Veja:

34 782 é divisível por 3 porque $3 + 4 + 7 + 8 + 2 = 24$ (é múltiplo de 3);
5 615 não é divisível por 3 porque $5 + 6 + 1 + 5 = 17$ (não é múltiplo de 3).

Coloque S ao lado dos números divisíveis por 3 e N ao lado dos não-divisíveis por 3:

1) 330 S	6) 951 S	11) 8 725 N
2) 153 S	7) 834 S	12) 12 528 S
3) 254 N	8) 723 S	13) 125 643 S
4) 375 S	9) 1 075 N	14) 1 020 351 S
5) 408 S	10) 3 542 N	15) 3 125 713 N

Divisibilidade por 4: regra do divisor 4

Quando se divide um número natural por 4, o resto da divisão é um elemento do conjunto {0, 1, 2, 3}. Para que o resto seja zero é preciso que o número seja divisível por 4.

> Um número natural é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos da direita de seu numeral representam um número múltiplo de 4: M(4) = {0, 4, 8, 12, 16, 20, . . .}.

Veja: 9 [72] é divisível por 4 — 72: múltiplo de 4

1 2 [13] não é divisível por 4 — 13: não é múltiplo de 4

Coloque S ao lado dos números divisíveis por 4 e N ao lado dos não-divisíveis por 4:

1) 728 S
2) 932 S
3) 501 N
4) 14 500 S
5) 2 926 N
6) 3 836 S
7) 9 880 S
8) 14 504 S
9) 125 912 S
10) 238 740 S
11) 314 917 N
12) 528 119 N
13) 1 250 348 S
14) 2 320 649 N
15) 1 000 004 S

Divisibilidade por 5: regra do divisor 5

O resto da divisão de um número natural por 5 é um elemento do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Para que o resto seja zero é preciso que o número seja divisível por 5.

> Um número natural é divisível por 5 quando o algarismo das unidades de seu numeral for **0** ou **5**.

Então: 2 57**0** é divisível por 5; 4 89**7** não é divisível por 5.

Coloque S ao lado dos números divisíveis por 5 e N ao lado dos não-divisíveis por 5:

1) 85 S
2) 110 S
3) 1 342 N
4) 2 470 S
5) 1 501 N
6) 620 S
7) 807 N
8) 6 915 S
9) 5 924 N
10) 12 314 N
11) 15 845 S
12) 124 002 N
13) 316 740 S
14) 1 250 714 N
15) 3 821 975 S

Divisibilidade por 6: regra do divisor 6

O resto da divisão de um número natural por 6 é um elemento do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Para que o resto seja zero é preciso que o número seja divisível por 6.

> Um número natural é divisível por 6 quando é, simultaneamente, divisível por 2 e 3.

Exemplo: 504 é divisível por 2 (é par);
504 é divisível por 3 ($5 + 0 + 4 = 9$).
Logo: 504 é divisível por 6.

Coloque S ao lado dos números divisíveis por 6 e N ao lado dos não-divisíveis por 6:

1) 804 S
2) 206 N
3) 903 N
4) 5 202 S
5) 6 718 N
6) 9 036 S
7) 12 503 N
8) 16 728 S
9) 27 104 N
10) 72 018 S
11) 125 315 N
12) 318 748 N
13) 520 110 S
14) 1 238 421 N
15) 1 000 002 S

Divisibilidade por 9: regra do divisor 9

O resto da divisão de um número natural por 9 é um elemento do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. O resto será zero quando o número for divisível por 9.

> Um número natural é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos (VA) dos algarismos de seu numeral é múltiplo de 9: $M(9) = \{0, 9, 18, 27, 36, \dots\}$.

Veja: 7 245 é divisível por 9 porque $7 + 2 + 4 + 5 = 18$ (é múltiplo de 9).

Coloque S ao lado dos números divisíveis por 9 e N ao lado dos não-divisíveis por 9:

1) 239 N
2) 514 N
3) 207 S
4) 638 N
5) 972 S
6) 3 006 S
7) 4 348 N
8) 5 312 N
9) 8 001 S
10) 1 008 S
11) 9 342 S
12) 15 471 S
13) 128 915 N
14) 2 120 347 N
15) 1 000 206 S

Divisibilidade por 10: regra do divisor 10

O resto da divisão de um número natural por 10 é um elemento do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Para que o resto seja zero é necessário que o número seja divisível por 10.

> Um número natural é divisível por 10 quando o algarismo das unidades de seu numeral é zero.

Observe: 3 720 é divisível por 10; 7 528 não é divisível por 10.

Coloque S ao lado dos números divisíveis por 10 e N ao lado dos não-divisíveis por 10:

1) 130 S
2) 356 N
3) 850 S
4) 1 237 N
5) 4 700 S
6) 12 316 N
7) 20 920 S
8) 123 472 N
9) 328 590 S
10) 1 230 450 S
11) 5 921 705 N
12) 1 000 260 S

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete adequadamente:

1) Se 8 × 5 = 40, então 40 é múltiplo de 8 e 5.
2) Se 10 × 6 = 60, então 6 e 10 são submúltiplos de 60.
3) Se 2 × 3 × 5 = 30, então 30 é múltiplo de 2, 3 e 5.
4) Se 3 × 7 × 10 = 210, então 3, 7 e 10 são submúltiplos ou divisores de 210.

b) Considere o conjunto A = {1, 5, 12, 15, 20, 25, 27, 30, 36}. Agora indique:

1) O conjunto dos números múltiplos de 2 contido em A: {12, 20, 30, 36}
2) O conjunto dos números divisíveis por 3 contido em A: {12, 15, 27, 30, 36}
3) O conjunto dos divisores de 30 contido em A: {1, 5, 15, 30}
4) O conjunto dos múltiplos de 5 contido em A: {5, 15, 20, 25, 30}

c) Considere o quadro:

35	82	920	311	140	289	6050
816	132	416	482	36	279	153
3051	47	48	243	44	901	190
24	57	1922	1025	405	3844	425
36	60	1979	108	1230	306	209
2	1008	5628	214	531	349	410
252	2452	3214	480	702	207	304
55	3	650	6035	20	143	2000
10	105	900	13	120	9837	156
8	98	1600	5320	842	41	2010

Agora marque com X:

1.ª coluna: os múltiplos de 2;
2.ª coluna: os múltiplos de 3;
3.ª coluna: os múltiplos de 4;
4.ª coluna: os múltiplos de 5;
5.ª coluna: os múltiplos de 6;
6.ª coluna: os múltiplos de 9;
7.ª coluna: os múltiplos de 10.

a) Coloque V nas sentenças verdadeiras e F nas falsas:

1) O zero é múltiplo de qualquer número. (V)

2) O conjunto dos divisores de 14 é finito. (V)

3) 1 é múltiplo de qualquer número. (F)

4) O conjunto dos múltiplos de zero é unitário. (V)

5) O menor múltiplo de qualquer número é 1. (F)

6) O conjunto dos divisores de 1 é vazio. (F)

7) Todo número par é múltiplo de 2. (V)

8) Todo número ímpar é múltiplo de 3. (F)

9) O conjunto dos divisores de zero é infinito. (V)

10) Todo número é múltiplo de 1. (V)

b) Escreva no □ o menor algarismo que, acrescido ao numeral, represente um número com as características indicadas:

1) 231 [0] divisível por 2 e 3

2) 4 532 [0] divisível por 2 e 5

3) 2 101 [5] divisível por 3 e 5

4) 4 131 [0] divisível por 2 e 9

5) 3 271 [5] divisível por 5 e 9

6) 500 243 [4] divisível por 2, 3 e 9

7) 4 370 [4] divisível por 6 e 9

8) 5 555 [0] divisível por 10

c) Sabendo que todo ano bissexto é múltiplo de 4 e considerando o conjunto A = {1 345, 1 485, 1 500, 1 640, 1 910, 1 928, 1 978, 1 979}, indique o subconjunto dos anos bissextos: {1500, 1640, 1928}

d) Coloque B nas datas que representam um ano bissexto e N nas que representam um ano não-bissexto:

1) Descobrimento da América: 1 492 (B)

2) Tratado de Tordesilhas: 1 494 (N)

3) Descobrimento do Brasil: 1 500 (B)

4) Primeira exploração espanhola: 1 501 (N)

5) Segunda exploração espanhola: 1 503 (N)

6) Fundação de São Paulo: 1 554 (N)

7) Primeira invasão holandesa: 1 624 (B)

8) Segunda invasão holandesa: 1 630 (N)

9) Fim do domínio espanhol: 1 640 (B)

10) Morte de Tiradentes: 1 792 (B)

11) Proclamação da Independência: 1 822 (N)

12) Confederação do Equador: 1 824 (B)

13) Fim do Primeiro Reinado: 1 831 (N)

14) Golpe da maioridade: 1 840 (B)

15) Lei Áurea: 1 888 (B)

16) Proclamação da República: 1 889 (N)

17) Eleição de Juscelino K. de Oliveira: 1 956 (B)

18) Início do governo revolucionário: 1 964 (B)

19) Posse de Artur da Costa e Silva: 1 967 (N)

20) Posse de Emílio G. Médici: 1 969 (N)

21) Posse de Ernesto Geisel: 1 974 (N)

22) Posse de João Batista Figueiredo: 1 979 (N)

e) Coloque S ao lado dos números divisíveis por 5 e N ao lado dos não-divisíveis por 5:

1) 125 S

2) 230 S

3) 106 N

4) 445 S

5) 503 N

6) 600 S

7) 725 S

8) 885 S

9) 999 N

10) 1 010 S

11) 3 495 S

12) 4 444 N

MAIOR DIVISOR COMUM

NOÇÃO DE NÚMERO PRIMO E NÚMERO COMPOSTO

Observe o quadro:

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Divisores	1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8	1 3 9	1 2 5 10	1 11	1 2 3 4 6 12	1 13	1 2 7 14	1 3 5 15	1 2 4 8 16	1 17	1 2 3 6 9 18	1 19	1 2 4 5 10 20

Note que:

- Existem números naturais que **só admitem dois divisores**: são chamados de **números primos**. No quadro acima, são primos os números: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
- Existem números naturais que admitem **mais de dois divisores**: são chamados de **números compostos**. No quadro, são compostos os números: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20.

Observe ainda que:

- O número 1 só admite um divisor: ele próprio. Logo, não é número primo nem composto.
- O menor número primo é o 2.
- O único número primo par é o 2.
- O conjunto dos números primos é infinito: P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, . . .}.

Complete:

1) D(14) = {1, 2, 7, 14}. O menor divisor primo de 14 é 2.
2) D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}. O maior divisor primo de 12 é 3.
3) D(20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}. O maior divisor primo de 20 é 5.
4) D(10) = {1, 2, 5, 10}. O menor divisor primo de 10 é 2.

RECONHECIMENTO PRÁTICO DE UM NÚMERO PRIMO

Para saber se um determinado número é primo basta dividi-lo pelos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, . . . até que o quociente seja menor ou igual ao divisor. Não ocorrendo divisão exata, o número em questão é primo.

Vamos verificar, por exemplo, se o número 83 é primo.

- As regras de divisibilidade mostram que 83 não é divisível por 2, 3 e 5.
- Efetuemos a divisão por 7:

```
83 | 7
13   11 ----- quociente maior que o divisor 11 > 7
 6
```

- Efetuemos então a divisão por 11:

```
83 | 11
 6    7 ----- quociente menor que o divisor 7 < 11
```

Conclusão: o número 83 é primo.

EXERCÍCIOS

a) Escreva ao lado de cada número se ele é primo ou composto:

1) 40 composto
2) 37 primo
3) 61 primo
4) 89 primo
5) 93 composto
6) 29 primo
7) 257 primo
8) 279 composto
9) 443 primo
10) 859 primo
11) 921 composto
12) 1 113 composto

b) Assinale com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas:

1) Todos os números ímpares são primos. (F)
2) Entre os números pares há mais de um número primo. (F)
3) Um número primo só admite dois divisores. (V)
4) Os conjuntos dos números primos e dos números compostos são disjuntos. (V)
5) Todos os números naturais ou são primos ou são compostos. (F)

FATORAÇÃO DE UM NÚMERO NATURAL: A DECOMPOSIÇÃO EM FATORES

Fatorar um número é transformar o seu numeral num produto indicado.

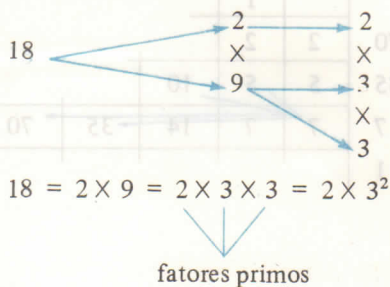
Exemplo: $18 = \underbrace{2 \times 9}_{\text{produto indicado}}$ $\quad 18 = \underbrace{3 \times 6}_{\text{produto indicado}}$

Esta operação recebe o nome de **fatoração.**

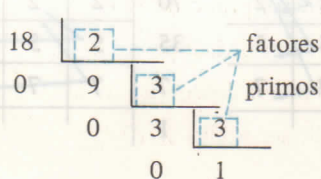
Para o estudo que vamos fazer agora, só interessa a **fatoração completa**, ou seja, a fatoração em que os fatores são números primos ou potências de números primos. Veja:

Decompor o número 18 em fatores primos:

1.º processo

$18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

fatores primos

2.º processo

Divisão sucessiva pelos divisores primos até que se encontre quociente 1.

Disposição prática

18	2
9	3
3	3
1	

VAMOS FAZER ALGUNS EXERCÍCIOS

Decomponha em fatores primos os seguintes números naturais:

1) 14

14	2
7	7
1	

$14 = 2 \times 7$

2) 32

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

3) 20

20	2
10	2
5	5
1	

$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$

4) 76

76 = $2 \times 2 \times 19 = 2^2 \times 19$

5) 90

90 = $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$

6) 120

120 = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

7) 156

156 = $2 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 13$

8) 180

180 = $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

OBTENÇÃO DE TODOS OS DIVISORES DE UM NÚMERO. PROCESSO PRÁTICO

Você já aprendeu a escrever o conjunto dos divisores de um número natural. Entretanto, agora podemos utilizar um dispositivo prático para a obtenção desse conjunto.

Vejamos:

Vamos achar todos os divisores de 70. Observe com atenção as diversas passagens:

D(70) = {1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70}

Outro exemplo: achar todos os divisores de 20.

D(20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

Utilizando o dispositivo prático, determine o conjunto dos divisores de:

1) 12 | 1
12 | 2 - 2
6 | 2 - 2 - 4
3 | 3 - 3 - 6 - 12
1 |

D(12) = { 1, 2, 3, 4, 6, 12 }

2) 18 | 1
18 | 2 - 2
9 | 3 - 3 - 6
3 | 3 - 3 - 9 - 18
1 |

D(18) = { 1, 2, 3, 6, 9, 18 }

3) 24 | 1
24 | 2 - 2
12 | 2 - 2 - 4
6 | 2 - 2 - 8
3 | 3 - 3 - 6 - 12 - 24
1 |

D(24) = { 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 }

4) 30 | 1
30 | 2 - 2
15 | 3 - 3 - 6
5 | 5 - 5 - 10 - 15 - 30
1 |

D(30) = { 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 }

5) 50 | 1
50 | 2 - 2
25 | 5 - 5 - 10
5 | 5 - 5 - 25 - 50
1 |

D(50) = { 1, 2, 5, 10, 25, 50 }

6) 45 | 1
45 | 3 - 3
15 | 3 - 3 - 9
5 | 5 - 5 - 15 - 45
1 |

D(45) = { 1, 3, 5, 9, 15, 45 }

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Escreva o conjunto dos números primos menores que 30:

{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 }

Agora complete:

1) O cardinal desse conjunto é 10.
2) O maior número primo desse conjunto é 29.
3) O maior número primo inferior a 20 é 19.

b) Decomponha em fatores primos:

1) 60 = $2^2 \times 3 \times 5$
2) 80 = $2^4 \times 5$
3) 100 = $2^2 \times 5^2$
4) 256 = 2^8
5) 39 = 3×13
6) 105 = $3 \times 5 \times 7$

c) Assinale com P os números primos e com C os compostos:

1) 109 (P)
2) 176 (C)
3) 337 (P)
4) 247 (C)
5) 263 (P)
6) 985 (C)

MAIOR DIVISOR COMUM

Observe o quadro que segue:

Divisores de 36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
Divisores de 60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
Divisores comuns	1, 2, 3, 4, 6, 12
Maior divisor comum	12

D(36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

A operação intersecção fornece o conjunto de divisores comuns:

$D(36) \cap D(60) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Note que dentre os divisores comuns de 36 e 60 o maior é o 12, o qual recebe o nome de **maior divisor comum** (m.d.c.) de 36 e 60.

Indicação: m.d.c. (36, 60) = 12

A operação que permite descobrir o m.d.c. chama-se **maximação**. Ao par de números (36, 60) a maximação faz corresponder o número 12, que recebe o nome de maior divisor comum:

$$(36, 60) \xrightarrow{\text{maximação}} 12$$

Agora observe este quadro:

Divisores de 6	1, 2, 3, 6
Divisores de 15	1, 3, 5, 15
Divisores de 45	1, 3, 5, 9, 15, 45
Divisores comuns	1, 3
Maior divisor comum	3

D(6) = {1, 2, 3, 6}
D(15) = {1, 3, 5, 15}
D(45) = {1, 3, 5, 9, 15, 45}

D(6) ∩ D(15) ∩ D(45) = {1, 3}
m.d.c. (6, 15, 45) = 3

Determine o conjunto dos divisores dos números naturais, o conjunto intersecção e o m.d.c.:

1) D(6) = {1, 2, 3, 6}
D(20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}
D(6) ∩ D(20) = {1, 2}
m.d.c. (6, 20) = 2

2) D(3) = {1, 3}
D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
D(3) ∩ D(12) = {1, 3}
m.d.c. (3, 12) = 3

3) D(18) = {1, 2, 3, 6, 9, 18}
D(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
D(18) ∩ D(24) = {1, 2, 3, 6}
m.d.c. (18, 24) = 6

4) D(15) = {1, 3, 5, 15}
D(25) = {1, 5, 25}
D(40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}
D(15) ∩ D(25) ∩ D(40) = {1, 5}
m.d.c. (15, 25, 40) = 5

PROCESSOS PRÁTICOS PARA A OBTENÇÃO DO M.D.C.

1.º processo: decomposição dos números em fatores primos

m.d.c. (18, 60) = ?

18	2
9	3
3	3
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

fatores comuns

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

m.d.c. (18, 60) = $2 \times 3 = 6$

m.d.c. = fatores comuns com os menores expoentes.

Usando o processo da decomposição, obtenha o m.d.c. dos seguintes números:

1) $40 = 2^3 \times 5$
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
m.d.c. (40, 60) = $2^2 \times 5 = 20$

2) $18 = 2 \times 3^2$
$24 = 2^3 \times 3$
m.d.c. (18, 24) = $2 \times 3 = 6$

3) $40 = 2^3 \times 5$
$50 = 2 \times 5^2$
m.d.c. (40, 50) = $2 \times 5 = 10$

4) $24 = 2^3 \times 3$
$42 = 2 \times 3 \times 7$
$54 = 2 \times 3^3$
m.d.c. (24, 42, 54) = $2 \times 3 = 6$

5) $36 = 2^2 \times 3^2$
$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
m.d.c. (36, 120, 180) = $2^2 \times 3 = 12$

6) $18 = 2 \times 3^2$
$12 = 2^2 \times 3$
$30 = 2 \times 3 \times 5$
m.d.c. (18, 12, 30) = $2 \times 3 = 6$

2.º **processo**: divisões sucessivas

Havendo três números, fazem-se divisões sucessivas de um deles com o m.d.c. dos outros dois. Veja:

m.d.c. (6, 15, 21) = ?

m.d.c. (6, 15, 21)

Usando o processo das divisões sucessivas, determine o m.d.c. dos números:

1) m.d.c. (15, 18) = 3

2) m.d.c. (16, 36) = 4

3) m.d.c. (16, 60) = 4

4) m.d.c. (12, 20, 36) = 4

5) m.d.c. (24, 18, 12) = 6

6) m.d.c. (75, 90, 150) = 15

Quando o m.d.c. de dois ou mais números naturais for igual a 1, costuma-se denominar esses números de **primos entre si**. Veja:

m.d.c. (30, 24, 35) = ?

m.d.c. (30, 24, 35) = 1, **então**: 30, 24 e 35 são números primos entre si.

Mostre, por meio de qualquer processo estudado, que os seguintes números naturais são primos entre si:

1) 12 e 13

2) 12 e 35

3) 18 e 55

4) 7, 14 e 15

5) 7, 20 e 27

6) 4, 6 e 21

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Escreva o conjunto dos números primos entre 20 e 40:

{ 23, 29, 31, 37 }

Agora responda:

1) O cardinal desse conjunto é 4.
2) O maior número primo desse conjunto é 37.
3) O menor número primo desse conjunto é 23.

b) Considere o quadro abaixo que representa um mês de 31 dias.

MAIO						
DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SAB
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Agora resolva:

1) Assinale com X os dias que são múltiplos de 3.
2) Faça um círculo ao redor dos dias que são divisores de 28.
3) Sombreie os quadrinhos dos números primos maiores que 10.
4) O dia da semana em que cai a data correspondente ao maior número primo é o sábado.
5) O dia da semana em que cai a data correspondente ao m.d.c. (12, 30) é a terça-feira.
6) O dia da semana em que cai a data correspondente ao m.d.c. (28, 16) é o domingo.

c) Complete as sentenças adequadamente:

1) m.d.c. (24, 40) = 8
2) m.d.c. (20, 24) = 4
3) m.d.c. (12, 75) = 3
4) m.d.c. (14, 182) = 14
5) m.d.c. (18, 24, 60) = 6
6) m.d.c. (36, 120, 180) = 12
7) m.d.c. (12, 18, 30) = 6
8) m.d.c. (12, 16, 24) = 4

d) Assinale com P os números primos entre si e com N os que não forem primos entre si:

1) 9, 18, 27 (N)
2) 5, 14, 18 (P)
3) 5, 7, 9 (P)
4) 12, 81, 16 (P)
5) 7, 21, 49 (N)
6) 24, 30, 35 (P)
7) 8, 9, 24 (P)
9) 8, 28, 40 (N)

e) Considere os números naturais a e b. Sabendo que $a = 2^2 \times 3 \times 7^2 \times 13^2$ e $b = 2^2 \times 3^2$, determine o m.d.c. (a, b):

m.d.c. (a, b) = $2^2 \times 3 = 12$

f) Sabendo que $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ e $b = 2 \times 3^3 \times 7$, determine o m.d.c. (a, b): m.d.c. (a, b) = $2 \times 3^2 = 18$

g) Sendo $a = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$ e $b = 2^2 \times 5^2 \times 7$, então o m.d.c. (a, b) é: m.d.c. (a, b) = $2^2 \times 5^2 = 100$

h) Usando o processo prático, obtenha todos os divisores dos números:

1) 15

D(15) = {1, 3, 5, 15}

2) 48

D(48) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}

3) 64

D(64) = {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}

4) 25

D(25) = {1, 5, 25}

5) 35

D(35) = {1, 5, 7, 35}

6) 40

D(40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Achar o m.d.c. dos números que seguem, usando o processo da decomposição em fatores primos e o das divisões sucessivas:

1) 35 e 50 (5)

2) 80 e 155 (5)

3) 30, 45 e 100 (5)

b) Problemas:

1) Num colégio há:

- 36 alunos com idade superior a 16 anos;
- 60 alunos cuja idade varia entre 12 e 15 anos;
- 84 alunos com idade inferior a 11 anos.

Certa vez, o diretor pediu a eles que formassem grupos por categoria de idade, com as seguintes características: todos os grupos deveriam ter o mesmo número de alunos e o maior número possível de alunos em cada grupo. Quantos alunos havia em cada grupo? (12)

2) Três líquidos diferentes, A, B e C, devem ser distribuídos em barris iguais. Há 108 litros do líquido A, 96 litros do B e 72 litros do C. Para que o número de barris seja o menor possível, qual deve ser a capacidade de cada barril? Quantos barris serão necessários para conter cada um dos líquidos? (12 l; 9 de A, 8 de B e 6 de C)

3) Considere dois livros, um com 128 páginas e outro com 144, reunidas em fascículos com o mesmo número de páginas. Sabendo que o número de páginas de cada fascículo é o maior possível, determine quantos fascículos tem cada livro. (8 e 9)

4) Temos três vigas de madeira cujos comprimentos são: 154 cm, 330 cm e 374 cm. Queremos dividi-las em partes iguais de modo que cada parte tenha o maior comprimento possível. Qual deve ser o comprimento de cada parte? Quantas partes se obtêm de cada viga? (22 cm; 7, 15 e 17)

Unidade 3

MENOR MÚLTIPLO COMUM

NOÇÃO DE MENOR MÚLTIPLO COMUM

Observe o quadro:

Múltiplos de 2	0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, . . .
Múltiplos de 3	0, 3, 6, 9, 12, . . .
Múltiplos comuns	0, 6, 12, . . .
Menor múltiplo comum diferente de zero	6

M(2) = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, . . .}
M(3) = {0, 3, 6, 9, 12, . . .}

A operação intersecção fornece o conjunto de múltiplos comuns:

M(2) ∩ M(3) = {0, 6, 12, . . .}

Note que:

- É impossível saber qual é o maior múltiplo comum, pois o conjunto é infinito.
- O zero é sempre o menor dos múltiplos comuns.

Entre os múltiplos comuns de 2 e 3, o menor diferente de zero é o 6, que recebe o nome de **menor múltiplo comum** (m.m.c.) de 2 e 3.

Indicação: m.m.c. (2, 3) = 6

A operação que permite descobrir o m.m.c. chama-se **minimação**. Ao par de números (2, 3) a minimação faz corresponder o número 6, o qual se denomina menor múltiplo comum.

$(2, 3) \xrightarrow{\text{minimação}} 6$

Agora observe este quadro:

Múltiplos de 2	0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, . . .
Múltiplos de 4	0, 4, 8, 12, 16, . . .
Múltiplos de 8	0, 8, 16, . . .
Múltiplos comuns	0, 8, 16, . . .
Menor múltiplo comum diferente de zero	8

M(2) = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, . . .}
M(4) = {0, 4, 8, 12, 16, . . .}
M(8) = {0, 8, 16, . . .}
M(2) ∩ M(4) ∩ M(8) = {0, 8, 16, . . .}
m.m.c. (2, 4, 8) = 8

Determine o conjunto dos múltiplos dos seguintes números naturais, o conjunto intersecção e o m.m.c.:

1) M(6) = { 0, 6, 12, 18, 24, 30, ... }
M(4) = { 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... }
M(6) ∩ M(4) = { 0, 12, 24, ... }
m.m.c. (6, 4) = 12

2) M(10) = { 0, 10, 20, 30, 40, ... }
M(5) = { 0, 5, 10, 15, 20, 25, ... }
M(10) ∩ M(5) = { 0, 10, 20, ... }
m.m.c. (10, 5) = 10

3) M(6) = { 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, ... }
M(9) = { 0, 9, 18, 27, 36, ... }
M(6) ∩ M(9) = { 0, 18, 36 ... }
m.m.c. (6, 9) = 18

4) M(3) = { 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ... }
M(4) = { 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... }
M(3) ∩ M(4) = { 0, 12, 24, ... }
m.m.c. (3, 4) = 12

PROCESSOS PRÁTICOS PARA A OBTENÇÃO DO M.M.C.

1.º processo: decomposição isolada

m.m.c. (18, 60) = ?

18	2
9	3
3	3
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

$\text{m.m.c.}(18, 60) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 240$

m.m.c. = fatores comuns e não-comuns, com os maiores expoentes.

Usando o processo da decomposição isolada, obtenha o m.m.c. dos seguintes números:

1) $9 = 3 \times 3 = 3^2$
$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
$\text{m.m.c.}(9, 12) = 2^2 \times 3^2 = 36$

2) $9 = 3 \times 3 = 3^2$
$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$
$\text{m.m.c.}(9, 16) = 2^4 \times 3^2 = 144$

3) $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$
$\text{m.m.c.}(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$

4) $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
$15 = 3 \times 5$
$\text{m.m.c.}(12, 15) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

5) $30 = 2 \times 3 \times 5$
$45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$
$\text{m.m.c.}(30, 45) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

6) $15 = 3 \times 5$
$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$
$6 = 2 \times 3$
$\text{m.m.c.}(15, 8, 6) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$

7) $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$
$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$
$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$
$\text{m.m.c.}(24, 36, 18) = 2^3 \times 3^2 = 72$

8) $9 = 3 \times 3 = 3^2$
$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$
$\text{m.m.c.}(9, 12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$

2.º processo: decomposição simultânea

m.m.c. (15, 18) = ?

15 – 18	2
15 – 9	3
5 – 3	3
5 – 1	5
1 – 1	$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$ (m.m.c.)

m.m.c. (6, 10, 15) = ?

6 – 10 – 15	2
3 – 5 – 15	3
1 – 5 – 5	5
1 – 1 – 1	$2 \times 3 \times 5 = 30$ (m.m.c.)

Obtenha o m.m.c. pelo processo da decomposição simultânea:

1) m.m.c. (18, 40) = 360

18 – 40	2
9 – 20	2
9 – 10	2
9 – 5	3
3 – 5	3
1 – 5	5
1 – 1	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$

2) m.m.c. (30, 45) = 90

30 – 45	2
15 – 45	3
5 – 15	3
5 – 5	5
1 – 1	$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

3) m.m.c. (24, 36) = 72

24 − 36	2
12 − 18	2
6 − 9	2
3 − 9	3
1 − 3	3
1 − 1	2 × 2 × 2 × 3 × 3 = 72

4) m.m.c. (30, 24) = 120

30 − 24	2
15 − 12	2
15 − 6	2
15 − 3	3
5 − 1	5
1 − 1	2 × 2 × 2 × 3 × 5 = 120

5) m.m.c. (24, 16, 12) = 48

24 − 16 − 12	2
12 − 8 − 6	2
6 − 4 − 3	2
3 − 2 − 3	2
3 − 1 − 3	3
1 − 1 − 1	2 × 2 × 2 × 2 × 3 = 48

6) m.m.c. (24, 36, 18) = 72

24 − 36 − 18	2
12 − 18 − 9	2
6 − 9 − 9	2
3 − 9 − 9	3
1 − 3 − 3	3
1 − 1 − 1	2 × 2 × 2 × 3 × 3 = 72

7) m.m.c. (12, 15, 20, 9) = 180

12 − 15 − 20 − 9	2
6 − 15 − 10 − 9	2
3 − 15 − 5 − 9	3
1 − 5 − 5 − 3	3
1 − 5 − 5 − 1	5
1 − 1 − 1 − 1	2 × 2 × 3 × 3 × 5 = 180

8) m.m.c. (16, 24, 9, 10) = 720

16 − 24 − 9 − 10	2
8 − 12 − 9 − 5	2
4 − 6 − 9 − 5	2
2 − 3 − 9 − 5	2
1 − 3 − 9 − 5	3
1 − 1 − 3 − 5	3
1 − 1 − 1 − 5	5
1 − 1 − 1 − 1	2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 = 720

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Considere o quadro abaixo, que representa um mês de 30 dias.

JUNHO

DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SÁB
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Agora resolva:

1) Descubra no quadro os múltiplos dos dias assinalados e escreva abaixo os conjuntos formados por esses múltiplos.

M(2) = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30}

M(7) = {7, 14, 21, 28}

2) Os múltiplos comuns desses dias são: 14 e 28.

M(2) ∩ M(7) = {14, 28}

3) O menor múltiplo comum é 14.

b) Complete as sentenças adequadamente:

1) m.m.c. (18, 30) = 90
2) m.m.c. (80, 120) = 240
3) m.m.c. (12, 36, 18) = 36
4) m.m.c. (4, 9) = 36
5) m.m.c. (8, 9) = 72
6) m.m.c. (4, 5, 20) = 20
7) m.m.c. (6, 9, 8) = 72
8) m.m.c. (21, 18, 15) = 630
9) m.m.c. (3, 15) = 15
10) m.m.c. (15, 25) = 75
11) m.m.c. (5, 6, 10, 15) = 30
12) m.m.c. (4, 20, 30, 45) = 180

c) Considere os números naturais a e b. Sabendo que a $= 2^2 \times 3$ e b $= 2 \times 3^2 \times 7$, determine o m.m.c. (a, b) e o m.d.c. (a, b):

m.m.c. (a, b) = $2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$ m.d.c. (a, b) = $2 \times 3 = 6$

d) Sendo a $= 3^2 \times 5 \times 7$ e b $= 2 \times 5$, determine o m.m.c. (a, b) e o m.d.c. (a, b):

m.m.c. (a, b) = $2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 630$ m.d.c. (a, b) = 5

e) Achar o m.d.c. e o m.m.c. dos números 16, 8 e 4:

m.d.c. (16, 8, 4) = 4   m.m.c. (16, 8, 4) = 16

Agora complete:

1) O número 16 é múltiplo dos números 8 e 4.

2) Quando um dos números for múltiplo dos outros, então ele será o m.m.c. e o menor dos submúltiplos será o m.d.c.

f) Achar o m.d.c. e o m.m.c. dos números 12 e 5:

m.d.c. (12, 5) = 1   m.m.c. (12, 5) = 60

Agora complete:

1) Como o m.d.c. (12, 5) é igual a 1, então os números 12 e 5 são primos entre si

2) Quando dois números são primos entre si, o m.m.c. de ambos é igual ao produto deles.

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Considere os seguintes meses do ano de 1979:

JANEIRO 1979

DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SÁB
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

FEVEREIRO 1979

DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SÁB
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28			

MAIO 1979

DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SÁB
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

JUNHO 1979

DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SÁB
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

JULHO 1979

DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SÁB
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Agora complete:

1) O m.m.c. dos dias assinalados em vermelho no mês de maio é 7 020.

2) Entre os dias assinalados em vermelho no mês de maio, o único que corresponde a um número primo é 13.

3) Dos dias assinalados em vermelho no mês de julho, o único que corresponde a um número divisível por 3 e 5 é 15 e a números divisíveis por 2 são 8 e 22.

4) O m.d.c. dos domingos de janeiro é 7 e o m.m.c. é 84.

5) Dentre os domingos de fevereiro, o único que corresponde a um número múltiplo de 3 é 18 e o único primo é 11.

6) O m.m.c. do terceiro domingo de janeiro e do terceiro domingo de julho é 105.

7) O conjunto dos divisores do número que corresponde ao dia assinalado em vermelho e que não é domingo, no mês de junho, é: D(14) = {1, 2, 7, 14}.

8) O quociente aproximado entre os números que correspondem ao último domingo do mês de junho e ao primeiro domingo do mês de janeiro é 3.

9) O conjunto dos dias de fevereiro que correspondem a números primos é: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}.
O cardinal desse conjunto é 9.

10) O único mês que possui como domingo um dia correspondente a um número que não é primo nem composto é julho.

b) Problemas:

1) Na primeira página de um livro são escritas as letras A, B e C. A letra **A** é repetida de 12 em 12 páginas; a letra **B** de 15 em 15, e a letra **C**, de 40 em 40. Sabendo que o livro possui 328 páginas, descubra o número das páginas em que as três letras aparecem juntas. (1, 121 e 241)

2) De um aeroporto, a cada 20 minutos parte um avião para o sul do país; a cada 40, para o norte; e a cada 100, para a região central. Sabendo que, na partida das 8 horas, houve um embarque simultâneo, pergunta-se: até às 18 horas, em que horários os embarques tornarão a coincidir? (11 h 20 min, 14 h 40 min e 18 h)

3) Num hospital, um enfermeiro fica de plantão à noite de 5 em 5 dias. Tendo ficado de plantão numa noite de sábado para domingo, pergunta-se: depois de quantos dias o seu plantão irá cair novamente numa noite de sábado para domingo? (m.m.c. (5, 7) = 35 dias)

4) Sabendo que: $A = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2$; $B = 2^2 \times 3^2 \times 7$ e $C = 2^3 \times 3 \times 7$, determine:

m.d.c. (A, B, C) = $2^2 \times 3 \times 7 = 84$

m.m.c. (A, B, C) = $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = 17\,640$

c) Testes:

1) Sabendo que $a = 2^3 \times 3^2$ e $b = 3^2$, então o m.d.c. (a, b) é:

a. ( ) 2^3 b. (X) 3^2 c. ( ) $2^3 \times 3^2$ d. ( ) 2×3

2) Sendo **a** e **b** os números do teste anterior, então o m.m.c. (a, b) é:

a. ( ) 2^3 b. ( ) 3^2 c. (X) $2^3 \times 3^2$ d. ( ) 2×3

3) O quociente entre o m.m.c. (6, 8, 12) e o m.d.c. (8, 160) é:

a. (X) 3 b. ( ) 8 c. ( ) 16 d. ( ) 24

4) O m.d.c. de dois números primos entre si é:

a. ( ) o maior deles b. ( ) o menor deles c. ( ) o produto deles d. (X) 1

5) O m.m.c. de dois números primos entre si é:

a. ( ) o maior deles b. ( ) o menor deles c. (X) o produto deles d. ( ) 1

NÚMEROS FRACIONÁRIOS

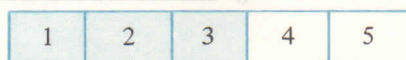
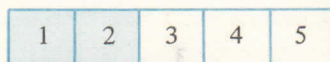
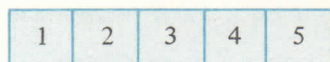
SURGE UMA NOVA CATEGORIA DE NÚMEROS: OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Adquirimos a noção de número fracionário dividindo uma coisa, considerada como um todo, em partes iguais e tomando apenas uma ou algumas dessas partes. O todo é chamado de **unidade** e cada uma das partes em que foi dividido é representada por um numeral chamado **fração**.

A fração é constituída de dois termos: o **numerador** e o **denominador**.

Numerador: indica quantas partes iguais são tomadas.

Denominador: indica em quantas partes iguais a unidade, ou seja, o todo foi dividido.

Observe:

Logo:

Número fracionário é um par ordenado de dois números naturais a e b $\left(\frac{a}{b}\right)$, sendo $b \neq 0$

$a \in \mathbb{N}$

$b \in \mathbb{N}^*$

COMO SE LÊ UM NÚMERO FRACIONÁRIO

- **1.º caso**: O denominador é: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Lê-se o numerador seguido da palavra meio, terço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo ou nono, conforme o denominador seja 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, respectivamente.

Veja:

$\frac{1}{2}$: um meio $\frac{1}{6}$: um sexto $\frac{2}{3}$: dois terços $\frac{4}{9}$: quatro nonos $\frac{3}{4}$: três quartos

$\frac{1}{3}$: um terço $\frac{1}{7}$: um sétimo $\frac{2}{7}$: dois sétimos $\frac{5}{8}$: cinco oitavos $\frac{1}{4}$: um quarto

$\frac{1}{8}$: um oitavo $\frac{3}{5}$: três quintos $\frac{7}{9}$: sete nonos $\frac{1}{5}$: um quinto $\frac{1}{9}$: um nono

Faça a leitura de:

1) $\frac{2}{4}$: dois quartos 2) $\frac{4}{6}$: quatro sextos 3) $\frac{7}{8}$: sete oitavos

4) $\frac{3}{4}$: três quartos 5) $\frac{4}{5}$: quatro quintos 6) $\frac{6}{9}$: seis nonos

7) $\frac{2}{5}$: dois quintos 8) $\frac{6}{7}$: seis sétimos 9) $\frac{5}{6}$: cinco sextos

- **2.º caso:** O denominador é 10, 100, 1 000, etc.

Lê-se o numerador seguido da palavra décimo, centésimo, milésimo, décimo milésimo, centésimo milésimo ou milionésimo, conforme o denominador seja 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 ou 1 000 000, respectivamente.

Observe:

$\frac{1}{10}$: um décimo

$\frac{3}{10}$: três décimos

$\frac{1}{100}$: um centésimo

$\frac{5}{1\,000}$: cinco milésimos

$\frac{1}{1\,000}$: um milésimo

$\frac{18}{10\,000}$: dezoito décimos milésimos

$\frac{1}{10\,000}$: um décimo milésimo

$\frac{1}{100\,000}$: um centésimo milésimo

$\frac{1}{1\,000\,000}$: um milionésimo

Complete:

1) $\frac{4}{10}$ lê-se: quatro décimos 2) $\frac{6}{100}$ lê-se: seis centésimos

3) $\frac{7}{10}$ lê-se: sete décimos 4) $\frac{18}{1000}$ lê-se: dezoito milésimos

5) $\frac{41}{100}$ lê-se: quarenta e um centésimos 6) $\frac{2}{10}$ lê-se: dois décimos

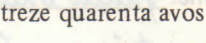
7) $\frac{62}{10\,000}$ lê-se: sessenta e dois décimos milésimos 8) $\frac{102}{1\,000\,000}$ lê-se: cento e dois milionésimos

9) $\frac{45}{100\,000}$ lê-se: quarenta e cinco centésimos milésimos 10) $\frac{31}{1\,000}$ lê-se: trinta e um milésimos

• 3.º caso: O denominador não é 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 nem potência de dez (10, 100, 1 000, etc.).

Lê-se o numerador seguido do denominador e da palavra **avo** ou **avos**.

Veja:

$\frac{1}{12}$: um doze avo — $\frac{4}{13}$: quatro treze avos — $\frac{1}{30}$: um trinta avo

$\frac{3}{11}$: três onze avos — $\frac{7}{20}$: sete vinte avos — $\frac{13}{40}$: treze quarenta avos

Complete:

1) $\frac{2}{15}$ lê-se: dois quinze avos
2) $\frac{7}{17}$ lê-se: sete dezessete avos
3) $\frac{1}{50}$ lê-se: um cinqüenta avo
4) $\frac{15}{61}$ lê-se: quinze sessenta e um avos
5) $\frac{31}{103}$ lê-se: trinta e um cento e três avos
6) $\frac{3}{21}$ lê-se: três vinte e um avos
7) $\frac{40}{73}$ lê-se: quarenta setenta e três avos
8) $\frac{1}{90}$ lê-se: um noventa avo
9) $\frac{200}{307}$ lê-se: duzentos trezentos e sete avos
10) $\frac{2}{1\,005}$ lê-se: dois mil e cinco avos

UMA DENOMINAÇÃO ESPECIAL DAS FRAÇÕES

As frações que apresentam como denominador uma potência de dez (10, 100, 1 000, etc.) recebem o nome de **frações decimais**. As demais são conhecidas por **frações ordinárias**.

Assim:

$\frac{2}{10}$ é um numeral chamado fração decimal;

$\frac{3}{4}$ é um numeral chamado fração ordinária.

Classifique, em fração ordinária ou fração decimal, os numerais:

1) $\frac{2}{3}$: fração ordinária
2) $\frac{4}{7}$: fração ordinária
3) $\frac{7}{10}$: fração decimal
4) $\frac{9}{20}$: fração ordinária
5) $\frac{41}{100}$: fração decimal
6) $\frac{73}{1\,000}$: fração decimal
7) $\frac{13}{90}$: fração ordinária
8) $\frac{1}{10\,000}$: fração decimal
9) $\frac{11}{1\,000\,000}$: fração decimal
10) $\frac{5}{999}$: fração ordinária

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

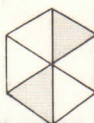
Considere a parte hachurada das figuras. Dê o numeral que a representa e, em seguida, o nome e a leitura desse numeral:

1)

numeral: $\frac{3}{5}$

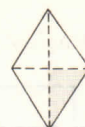
nome: fração ordinária

leitura: três quintos

2)

numeral: $\frac{2}{6}$

nome: fração ordinária

leitura: dois sextos

3)

numeral: $\frac{1}{4}$

nome: fração ordinária

leitura: um quarto

4)

numeral: $\frac{4}{16}$

nome: fração ordinária

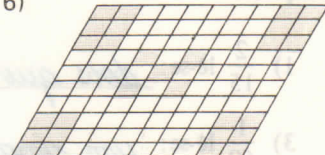
leitura: quatro dezesseis avos

5)

numeral: $\frac{5}{10}$

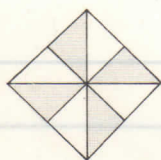
nome: fração decimal

leitura: cinco décimos

6)

numeral: $\frac{29}{100}$

nome: fração decimal

leitura: vinte e nove centésimos

7)

numeral: $\frac{4}{8}$

nome: fração ordinária

leitura: quatro oitavos

8)

numeral: $\frac{3}{8}$

nome: fração ordinária

leitura: três oitavos

9)

numeral: $\frac{3}{16}$

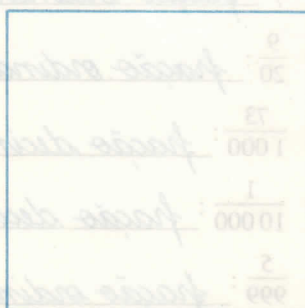
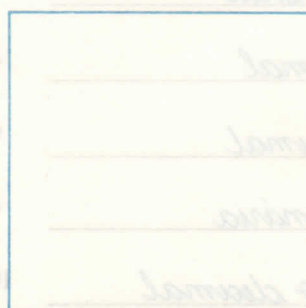
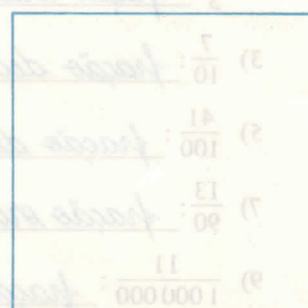
nome: fração ordinária

leitura: três dezesseis avos

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Desenhe uma figura, hachurando a parte representada pelo numeral:

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{4}{10}$ 4) $\frac{3}{4}$

UMA CLASSIFICAÇÃO

Observe as frações:

$\frac{3}{4}$

Nesta fração o numerador (3) é menor do que o denominador (4). Ela recebe o nome de **fração própria**.

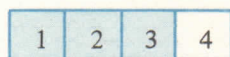
$\frac{6}{5}$

Nesta fração o numerador (6) é maior do que o denominador (5). Ela recebe o nome de **fração imprópria**.

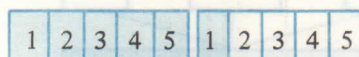
$\frac{8}{4}$

Nesta fração o numerador (8) é um múltiplo do denominador (4), isto é, o numerador é divisível pelo denominador. Ela recebe o nome de **fração aparente**.

UNIDADE

UNIDADE UNIDADE

UNIDADE UNIDADE

A **fração própria** é um numeral que representa uma parte do objeto tomado como unidade:

$$\frac{3}{4} < 1$$

A **fração imprópria** é um numeral que representa uma quantidade maior que a unidade:

$$\frac{6}{5} > 1$$

A **fração aparente** é um numeral de um número natural:

$$\frac{8}{4} = 2, \text{ pois}$$

$$8 : 4 = 2$$

Classifique as frações em própria, imprópria ou aparente:

1) $\frac{5}{3}$: imprópria
2) $\frac{2}{3}$: própria
3) $\frac{4}{3}$: imprópria
4) $\frac{6}{2}$: aparente
5) $\frac{7}{8}$: própria
6) $\frac{3}{10}$: própria
7) $\frac{20}{10}$: aparente
8) $\frac{10}{5}$: aparente
9) $\frac{5}{4}$: imprópria
10) $\frac{3}{8}$: própria
11) $\frac{4}{7}$: própria
12) $\frac{12}{30}$: própria
13) $\frac{5}{6}$: própria
14) $\frac{12}{3}$: aparente
15) $\frac{4}{4}$: aparente
16) $\frac{5}{1}$: aparente
17) $\frac{1}{3}$: própria
18) $\frac{16}{4}$: aparente

Complete conforme o modelo:

1) $\frac{2}{3} < 1$
2) $\frac{3}{4} < 1$
3) $\frac{8}{5} > 1$
4) $\frac{6}{3} = 2$
5) $\frac{5}{10} < 1$
6) $\frac{1}{4} < 1$
7) $\frac{6}{1} = 6$
8) $\frac{10}{2} = 5$
9) $\frac{9}{10} < 1$
10) $\frac{3}{7} < 1$
11) $\frac{3}{2} > 1$
12) $\frac{2}{5} < 1$
13) $\frac{4}{4} = 1$
14) $\frac{2}{9} < 1$
15) $\frac{7}{2} > 1$
16) $\frac{6}{11} < 1$

SURGE UMA NOVA CLASSE DE NUMERAIS: OS NUMERAIS MISTOS

Numa fração, o traço indica a divisão do numerador pelo denominador.

Assim:

$\frac{4}{2} = 4 : 2 = 2$ $\quad \frac{3}{2} = 3 : 2$ $\quad \frac{5}{10} = 5 : 10$

$\frac{6}{1} = 6 : 1 = 6$ $\quad \frac{1}{5} = 1 : 5$ $\quad \frac{10}{2} = 10 : 2 = 5$

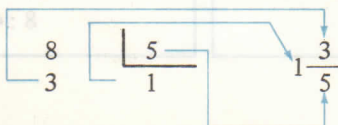
Então:

$\frac{8}{2} = 8 : 2 = 4$

São diferentes numerais do mesmo número, ou seja, do número quatro.

Pois bem, quando se tem uma fração imprópria, pode-se transformá-la num outro numeral: o **numeral misto.**

Veja:

$\frac{8}{5} = 8 : 5$ $\qquad 8 \div 5 = 1$, resto 3 $\qquad 1\frac{3}{5}$

$\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$

fração imprópria — numeral misto — parte inteira (1) — parte fracionária ($\frac{3}{5}$)

COMO SE LÊ UM NUMERAL MISTO

Lê-se, primeiramente, a parte inteira do numeral acompanhada da palavra **inteiro(s)** e, em seguida, lê-se a parte fracionária.

Veja:

$1\frac{3}{5}$ lê-se: um inteiro e três quintos.

Complete:

1) $1\frac{2}{3}$ lê-se: um inteiro e dois terços.

2) $2\frac{1}{4}$ lê-se: dois inteiros e um quarto.

3) $2\frac{4}{5}$ lê-se: dois inteiros e quatro quintos.

4) $3\frac{1}{7}$ lê-se: três inteiros e um sétimo.

5) $1\frac{5}{9}$ lê-se: um inteiro e cinco nonos.

6) $4\frac{3}{10}$ lê-se: quatro inteiros e três décimos.

7) $3\frac{1}{8}$ lê-se: três inteiros e um oitavo.

8) $2\frac{5}{12}$ lê-se: dois inteiros e cinco doze avos.

9) $1\frac{6}{20}$ lê-se: um inteiro e seis vinte avos.

10) $5\frac{9}{100}$ lê-se: cinco inteiros e nove centésimos.

Transforme em numeral misto:

1) $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$ 2) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ 3) $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ 4) $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

5) $\frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$ 6) $\frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$ 7) $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ 8) $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

9) $\frac{13}{10} = 1\frac{3}{10}$ 10) $\frac{16}{13} = 1\frac{3}{13}$ 11) $\frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$ 12) $\frac{14}{11} = 1\frac{3}{11}$

13) $\frac{35}{10} = 3\frac{5}{10}$ 14) $\frac{41}{8} = 5\frac{1}{8}$ 15) $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$ 16) $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

17) $\frac{82}{15} = 5\frac{7}{15}$ 18) $\frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$ 19) $\frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$ 20) $\frac{121}{100} = 1\frac{21}{100}$

Veja, no exemplo que segue, como podemos transformar um numeral misto em fração imprópria:

Transforme em fração imprópria:

1) $1\frac{1}{4} = \frac{4\times1+1}{4} = \frac{5}{4}$ 2) $1\frac{3}{7} = \frac{7\times1+3}{7} = \frac{10}{7}$

3) $2\frac{1}{3} = \frac{3\times2+1}{3} = \frac{7}{3}$ 4) $2\frac{3}{8} = \frac{8\times2+3}{8} = \frac{19}{8}$

5) $3\frac{1}{6} = \frac{6\times3+1}{6} = \frac{19}{6}$ 6) $1\frac{5}{9} = \frac{9\times1+5}{9} = \frac{14}{9}$

7) $2\frac{3}{10} = \frac{10\times2+3}{10} = \frac{23}{10}$ 8) $9\frac{2}{3} = \frac{3\times9+2}{3} = \frac{29}{3}$

9) $12\frac{2}{3} = \frac{3\times12+2}{3} = \frac{38}{3}$ 10) $10\frac{1}{10} = \frac{10\times10+1}{10} = \frac{101}{10}$

11) $30\frac{1}{2} = \frac{2\times30+1}{2} = \frac{61}{2}$ 12) $5\frac{7}{8} = \frac{8\times5+7}{8} = \frac{47}{8}$

a) Complete:

1) Na fração $\frac{3}{5}$, o 3 chama-se numerador e o 5 chama-se denominador.

2) $\frac{2}{7}$ lê-se: dois sétimos.

3) Sete onze avos é a leitura da fração $\frac{7}{11}$.

4) $2\frac{1}{11}$ lê-se: dois inteiros e um onze avo.

5) Uma fração, cujo numerador é 9 e o denominador é 15, escreve-se: $\frac{9}{15}$.

6) $5\frac{2}{3}$ é um numeral misto.

7) $\frac{13}{4}$, 13 : 4 e $3\frac{1}{4}$ são numerais do mesmo número.

8) Numa fração própria, o numerador é menor do que o denominador.

9) Numa fração imprópria, o numerador é maior do que o denominador.

10) Numa fração aparente, o numerador é múltiplo do denominador.

b) Complete, conforme o modelo:

$\frac{3}{8}$: fração ordinária própria

1) $\frac{1}{13}$: fração ordinária própria
2) $\frac{17}{7}$: fração ordinária imprópria
3) $\frac{8}{10}$: fração decimal própria
4) $\frac{19}{100}$: fração decimal propria
5) $\frac{203}{100}$: fração decimal imprópria
6) $\frac{29}{29}$: fração ordinária aparente
7) $\frac{10}{100}$: fração decimal própria
8) $\frac{100}{10}$: fração decimal aparente
9) $\frac{20}{10}$: fração decimal aparente
10) $\frac{19}{9}$: fração ordinária imprópria

c) Transforme em numeral misto:

1) $\frac{312}{10} = 31\frac{2}{10}$
2) $\frac{49}{18} = 2\frac{13}{18}$
3) $\frac{51}{35} = 1\frac{16}{35}$
4) $\frac{67}{42} = 1\frac{25}{42}$
5) $\frac{417}{100} = 4\frac{17}{100}$
6) $\frac{93}{20} = 4\frac{13}{20}$

d) Transforme em fração imprópria:

1) $5\frac{41}{60} = \frac{341}{60}$
2) $2\frac{19}{75} = \frac{169}{75}$
3) $3\frac{1}{13} = \frac{40}{13}$
4) $1\frac{1}{19} = \frac{20}{19}$
5) $1\frac{13}{17} = \frac{30}{17}$
6) $4\frac{21}{39} = \frac{177}{39}$

e) Resolva:

1) Um tablete de chocolate foi dividido em nove partes iguais. Rogério recebeu três dessas partes, Marco recebeu duas e Lígia recebeu quatro. Quais as frações que representam os pedaços de chocolate que cada um recebeu?

a) Rogério recebeu $\frac{3}{9}$ do chocolate.

b) Marco recebeu $\frac{2}{9}$ do chocolate.

c) Lígia recebeu $\frac{4}{9}$ do chocolate.

2) Qual a fração que representa a parte do ano formada pelos meses:

a) janeiro, fevereiro e março: $\frac{3}{12}$

b) novembro e dezembro: $\frac{2}{12}$

c) setembro, outubro, novembro e dezembro: $\frac{4}{12}$

3) Qual a fração que representa a parte da semana formada pelos dias:

a) domingo e segunda-feira: $\frac{2}{7}$

b) quinta-feira, sexta-feira e sábado: $\frac{3}{7}$

c) quinta-feira: $\frac{1}{7}$

4) Escreva três numerais diferentes que representam o número:

a) sete: $7;\ 14:2;\ \frac{14}{2}$

b) doze: $12;\ 6 \times 2;\ \frac{24}{2}$

c) três: $3;\ 5-2;\ 6:2$

d) quinze: $15;\ 8+7;\ \frac{45}{3}$

e) dez: $10;\ \frac{40}{4};\ 9+1$

5) 6 kg de açúcar foram distribuídos a três pessoas **A**, **B** e **C**. **A** recebeu 3 kg de açúcar, **B** recebeu 1 kg e **C** recebeu 2 kg. Que fração representa a quantidade recebida por cada pessoa?

A recebeu $\frac{3}{6}$

B recebeu $\frac{1}{6}$

C recebeu $\frac{2}{6}$

6) Um pacote contém 10 balas. Estas balas foram distribuídas entre Lígia, Daniel e Leandro, que receberam respectivamente 3, 2 e 5 balas. Qual a fração que representa a quantidade recebida por cada um?

Lígia: $\frac{3}{10}$ Daniel: $\frac{2}{10}$ Leandro: $\frac{5}{10}$

CLASSE DE EQUIVALÊNCIA

Observe as figuras. Elas representam o mesmo objeto dividido em 3, 6 e 12 partes.

Dividido em 3	Dividido em 6	Dividido em 12		Indicação
1, 2 → $\frac{2}{3}$	1, 2, 3, 4 → $\frac{4}{6}$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 → $\frac{8}{12}$	Este pedaço do objeto pode ser representado pelos numerais: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{8}{12}$. Tais frações são denominadas **frações equivalentes.**	$\frac{2}{3} \sim \frac{4}{6} \sim \frac{8}{12}$
3 → $\frac{1}{3}$	5, 6 → $\frac{2}{6}$	9, 10, 11, 12 → $\frac{4}{12}$	Este pedaço pode ser representado por: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{4}{12}$. Tais frações são **frações equivalentes.**	$\frac{1}{3} \sim \frac{2}{6} \sim \frac{4}{12}$

As frações equivalentes são, portanto, numerais do mesmo número.

O conjunto formado por todas as frações equivalentes de um determinado número recebe o nome de **classe de equivalência** desse número.

Para maior facilidade, costuma-se usar o sinal = em lugar de ~ para as frações equivalentes. Veja:

$\frac{2}{3} \sim \frac{4}{6} \sim \frac{8}{12}$ escreve-se: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$

DADA UMA FRAÇÃO, COMO OBTER OUTRAS EQUIVALENTES?

Para obter frações equivalentes, aplica-se a regra fundamental:

Multiplicando ou dividindo os dois termos de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero, obtém-se outra fração equivalente à primeira.

Frações equivalentes a $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$$

(× 2, × 3, × 4 no numerador e no denominador)

Frações equivalentes a $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots$$

(× 2, × 3, × 4 no numerador e no denominador)

Desta mesma maneira obtém-se uma classe de equivalência.

Veja:

Classe de equivalência de um meio:

Indicação: $\overline{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots \right\}$

Classe de equivalência de dois terços:

Indicação: $\overline{\frac{2}{3}} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \ldots \right\}$

Encontre as frações equivalentes a:

1) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \ldots$

2) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \ldots$

3) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \ldots$

4) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \ldots$

5) $\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \ldots$

6) $\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{12}{21} = \frac{16}{28} = \ldots$

Complete as seguintes classes de equivalência:

1) $\overline{\frac{1}{4}} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \ldots \right\}$

2) $\overline{\frac{3}{8}} = \left\{ \frac{3}{8}, \frac{6}{16}, \frac{9}{24}, \frac{12}{32}, \ldots \right\}$

3) $\overline{\frac{4}{5}} = \left\{ \frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20}, \ldots \right\}$

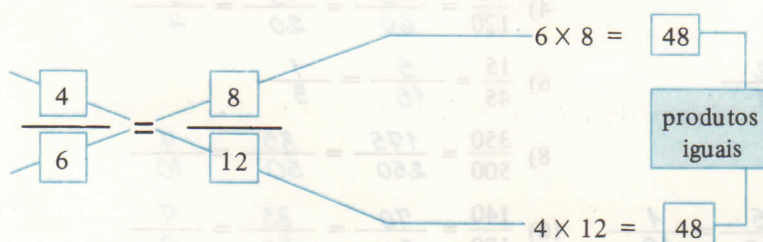
4) $\overline{\frac{1}{8}} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{3}{24}, \frac{4}{32}, \ldots \right\}$

5) $\overline{\frac{6}{7}} = \left\{ \frac{6}{7}, \frac{12}{14}, \frac{18}{21}, \frac{24}{28}, \ldots \right\}$

6) $\overline{\frac{9}{10}} = \left\{ \frac{9}{10}, \frac{18}{20}, \frac{27}{30}, \frac{36}{40}, \ldots \right\}$

COMO SABER SE DUAS FRAÇÕES SÃO EQUIVALENTES?

Observe:

Conforme já sabemos, $\frac{4}{6}$ e $\frac{8}{12}$ são frações equivalentes. Então:

Verifique se as frações são equivalentes ou não. Se forem equivalentes, coloque no □ o sinal = , caso contrário, coloque o sinal ≠ :

1) $\frac{2}{3} \boxed{=} \frac{4}{6}$ 2) $\frac{1}{4} \boxed{=} \frac{2}{8}$ 3) $\frac{3}{5} \boxed{=} \frac{9}{15}$ 4) $\frac{2}{7} \boxed{\neq} \frac{6}{15}$

5) $\frac{3}{4} \boxed{\neq} \frac{6}{12}$ 6) $\frac{4}{9} \boxed{=} \frac{12}{27}$ 7) $\frac{1}{8} \boxed{\neq} \frac{8}{16}$ 8) $\frac{7}{15} \boxed{=} \frac{21}{45}$

9) $\frac{1}{2} \boxed{=} \frac{5}{10}$ 10) $\frac{3}{10} \boxed{=} \frac{18}{60}$ 11) $\frac{9}{10} \boxed{\neq} \frac{27}{13}$ 12) $\frac{41}{100} \boxed{\neq} \frac{123}{400}$

13) $\frac{1}{6} \boxed{=} \frac{11}{66}$ 14) $\frac{1}{100} \boxed{\neq} \frac{9}{800}$ 15) $\frac{5}{6} \boxed{=} \frac{45}{54}$ 16) $\frac{8}{9} \boxed{\neq} \frac{90}{80}$

17) $\frac{15}{18} \boxed{=} \frac{5}{6}$ 18) $\frac{21}{49} \boxed{\neq} \frac{3}{8}$ 19) $\frac{1}{3} \boxed{\neq} \frac{4}{7}$ 20) $\frac{5}{11} \boxed{=} \frac{15}{33}$

FRAÇÕES REDUTÍVEIS E IRREDUTÍVEIS

Considere a fração: $\frac{24}{96}$

De acordo com a regra fundamental, dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo número natural, obtemos frações equivalentes.

Veja:

$$\frac{24}{96} \overset{:2}{=} \frac{12}{48} \overset{:2}{=} \frac{6}{24} \overset{:2}{=} \frac{3}{12} \overset{:3}{=} \frac{1}{4}$$

Note que, ao efetuarmos a divisão, obtemos uma fração equivalente, cujos termos são números naturais menores. Quando a divisão não é mais possível, obtemos uma fração cujos termos são números primos entre si.

$\frac{1}{4}$ — 1 e 4 são primos entre si (m.d.c. = 1)

Este processo chama-se **simplificação.**

$$\frac{24}{96} = \frac{12}{48} = \frac{6}{24} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

frações redutíveis — fração irredutível

Ache as frações equivalentes até obter a fração irredutível:

1) $\frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2) $\frac{12}{30} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

3) $\frac{30}{45} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

4) $\frac{90}{120} = \frac{45}{60} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

5) $\frac{40}{140} = \frac{20}{70} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

6) $\frac{15}{45} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

7) $\frac{42}{70} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$

8) $\frac{350}{500} = \frac{175}{250} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$

9) $\frac{40}{400} = \frac{20}{200} = \frac{10}{100} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

10) $\frac{140}{180} = \frac{70}{90} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$

11) $\frac{64}{72} = \frac{32}{36} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$

12) $\frac{27}{90} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

13) $\frac{24}{28} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

14) $\frac{48}{64} = \frac{24}{32} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

15) $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

16) $\frac{120}{140} = \frac{60}{70} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$

Podemos obter diretamente a fração irredutível, dividindo o numerador e o denominador pelo m.d.c. dos dois.

$$\frac{24}{96} \overset{:24}{=} \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 96 & 24 \\ \hline 00 & 4 \end{array}$$

m.d.c. (96, 24) = 24

Obtenha a fração irredutível, dividindo os termos pelo m.d.c.:

1) $\frac{35}{50} = \frac{7}{10}$ 2) $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ 3) $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ 4) $\frac{64}{72} = \frac{8}{9}$

5) $\frac{48}{56} = \frac{6}{7}$ 6) $\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ 7) $\frac{96}{128} = \frac{3}{4}$ 8) $\frac{54}{180} = \frac{3}{10}$

9) $\frac{45}{135} = \frac{1}{3}$ 10) $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ 11) $\frac{14}{18} = \frac{7}{9}$ 12) $\frac{42}{70} = \frac{3}{5}$

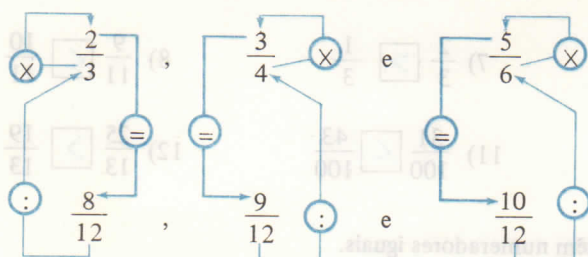
13) $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ 14) $\frac{35}{45} = \frac{7}{9}$ 15) $\frac{96}{120} = \frac{4}{5}$

REDUÇÃO DE FRAÇÕES AO MENOR DENOMINADOR COMUM

Vamos considerar o seguinte problema: obter as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ que possuam o mesmo denominador.

Procedimento:

- Determina-se o m.m.c. dos denominadores.
- Divide-se o m.m.c. pelo denominador e multiplica-se o quociente obtido pelo numerador da fração. Obtém-se, assim, o numerador da fração equivalente, cujo denominador será o m.m.c.

Disposição prática:

Reduza as frações ao menor denominador comum:

1) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ ⇒ $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{6}$

m.m.c. (2, 3) = 6

2) $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ ⇒ $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$

m.m.c. (3, 4) = 12

3) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$ ⇒ $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{5}{6}$

m.m.c. (2, 3, 6) = 6

4) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ ⇒ $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$

m.m.c. (3, 4) = 12

5) $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{20}$ ⇒ $\frac{12}{20}$ e $\frac{7}{20}$

m.m.c. (5, 20) = 20

6) $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{9}$ e $\frac{7}{12}$ ⇒ $\frac{30}{36}$, $\frac{20}{36}$ e $\frac{21}{36}$

m.m.c. (6, 9, 12) = 36

7) $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{8}$ e $\frac{4}{5}$ ⇒ $\frac{12}{40}$, $\frac{25}{40}$ e $\frac{32}{40}$

m.m.c. (10, 8, 5) = 40

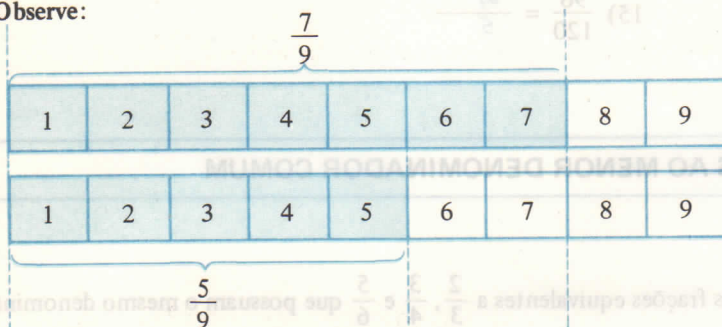
8) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ ⇒ $\frac{15}{30}$, $\frac{10}{30}$ e $\frac{6}{30}$

m.m.c. (2, 3, 5) = 30

COMPARAÇÃO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

- **1.º caso:** Números fracionários, cujas frações têm denominadores iguais.

A fração com o maior numerador representa o número maior.

Observe:

Perceba que a parte do objeto representada por $\frac{7}{9}$ é maior do que a parte representada por $\frac{5}{9}$.

Então: $\frac{7}{9} > \frac{5}{9}$ ou $\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$

Compare, colocando no □ os símbolos > ou < :

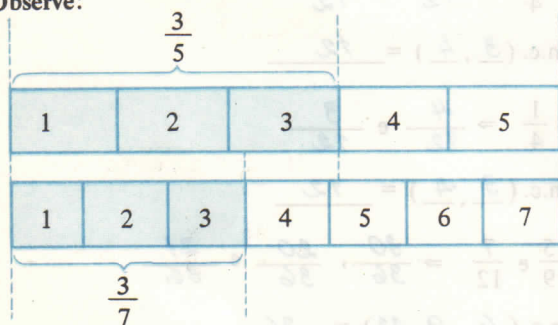
1) $\frac{1}{4}$ [<] $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{3}{5}$ [>] $\frac{2}{5}$ 3) $\frac{4}{7}$ [>] $\frac{3}{7}$ 4) $\frac{5}{6}$ [>] $\frac{1}{6}$

5) $\frac{5}{8}$ [<] $\frac{7}{8}$ 6) $\frac{5}{8}$ [>] $\frac{3}{8}$ 7) $\frac{2}{3}$ [>] $\frac{1}{3}$ 8) $\frac{9}{11}$ [<] $\frac{10}{11}$

9) $\frac{7}{10}$ [>] $\frac{3}{10}$ 10) $\frac{8}{17}$ [>] $\frac{5}{17}$ 11) $\frac{31}{100}$ [<] $\frac{43}{100}$ 12) $\frac{25}{13}$ [>] $\frac{19}{13}$

- **2.º caso:** Números fracionários cujas frações têm numeradores iguais.

A fração com o menor denominador representa o número maior.

Observe:

Perceba que a parte do objeto representada por $\frac{3}{5}$ é maior do que a parte representada por $\frac{3}{7}$.

Então: $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$ ou $\frac{3}{7} < \frac{3}{5}$

Coloque no □ o símbolo > ou <:

1) $\frac{2}{3}$ [>] $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{2}{7}$ [<] $\frac{2}{6}$ 3) $\frac{5}{10}$ [<] $\frac{5}{8}$ 4) $\frac{1}{3}$ [>] $\frac{1}{5}$

5) $\frac{1}{7}$ [<] $\frac{1}{6}$ 6) $\frac{6}{10}$ [<] $\frac{6}{7}$ 7) $\frac{7}{100}$ [<] $\frac{7}{50}$ 8) $\frac{4}{9}$ [>] $\frac{4}{15}$

9) $\frac{11}{20}$ [>] $\frac{11}{27}$ 10) $\frac{10}{100}$ [>] $\frac{10}{1000}$ 11) $\frac{9}{15}$ [>] $\frac{9}{20}$ 12) $\frac{8}{9}$ [>] $\frac{8}{11}$

- **3.º caso:** Números fracionários, cujas frações têm numeradores e denominadores diferentes.

Como comparar os números $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$?

Procedimento:

- Obter frações equivalentes com o mesmo denominador.
- Comparar as frações de acordo com o 1.º caso.

Complete, colocando no □ o símbolo > ou <:

1) $\frac{1}{3}$ [<] $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{2}{3}$ [<] $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{1}{3}$ [<] $\frac{3}{5}$ 4) $\frac{5}{8}$ [<] $\frac{3}{4}$

5) $\frac{7}{10}$ [<] $\frac{8}{9}$ 6) $\frac{3}{7}$ [<] $\frac{8}{14}$ 7) $\frac{5}{6}$ [>] $\frac{2}{3}$ 8) $\frac{3}{8}$ [>] $\frac{1}{4}$

9) $\frac{2}{7}$ [>] $\frac{1}{4}$ 10) $\frac{3}{4}$ [>] $\frac{11}{16}$ 11) $\frac{4}{5}$ [<] $\frac{5}{6}$ 12) $\frac{1}{2}$ [<] $\frac{3}{5}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Dê a classe de equivalência:

1) $\overline{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots \right\}$ 2) $\overline{\frac{5}{7}} = \left\{ \frac{5}{7}, \frac{10}{14}, \frac{15}{21}, \frac{20}{28}, \ldots \right\}$

3) $\overline{\frac{2}{1}} = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \ldots \right\}$ 4) $\overline{\frac{3}{10}} = \left\{ \frac{3}{10}, \frac{6}{20}, \frac{9}{30}, \frac{12}{40}, \ldots \right\}$

b) Dadas as frações equivalentes, descubra o valor de x:

1) $\frac{2}{3} = \frac{x}{9}$, então: x = 6 2) $\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$, então: x = 24 3) $\frac{x}{30} = \frac{4}{5}$, então: x = 24

4) $\frac{35}{x} = \frac{7}{10}$, então: x = 50 5) $\frac{9}{6} = \frac{3}{x}$, então: x = 2 6) $\frac{48}{64} = \frac{x}{8}$, então: x = 6

c) Escreva em ordem crescente:

1) $\frac{3}{4}, \frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}$ e $\frac{2}{7}$ 3) $\frac{8}{9}, \frac{5}{9}, \frac{4}{9}$ e $\frac{7}{9}$

$\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}$ $\frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{6}{7}$ $\frac{4}{9} < \frac{5}{9} < \frac{7}{9} < \frac{8}{9}$

Coloque V nas sentenças verdadeiras e F nas falsas:

1) $5 \in \mathbb{Q}_+$ (V)
2) $\frac{4}{8} \notin \mathbb{Q}_+$ (F)
3) $\frac{1}{2} \subset \mathbb{Q}_+$ (F)
4) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+$ (V)
5) $\left\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}\right\} \subset \mathbb{N}$ (F)
6) $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\} \subset \mathbb{Q}_+$ (V)
7) $\mathbb{Q}_+ \supset \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$ (V)
8) $\mathbb{Q}_+ \not\supset \mathbb{N}$ (F)
9) $\mathbb{N} \supset \left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$ (F)
10) $\mathbb{Q}_+ \supset \{\ \}$ (V)
11) $\mathbb{Q}_+ \supset \{0\}$ (V)
12) $\left\{0, \frac{1}{2}\right\} \not\subset \mathbb{N}$ (V)

OPERAÇÕES EM $\mathbb{Q}_+$: ADIÇÃO

Denominadores iguais

Conserva-se o denominador e adicionam-se os numeradores.

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}$$

parcelas — soma

Efetue as operações:

1) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$
2) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
3) $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
4) $\frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$
5) $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$
6) $\frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$
7) $\frac{4}{11} + \frac{5}{11} + \frac{2}{11} = \frac{11}{11} = 1$
8) $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$
9) $\frac{14}{100} + \frac{18}{100} + \frac{8}{100} = \frac{40}{100}$

Denominadores diferentes

Obtém-se, em primeiro lugar, frações equivalentes com o mesmo denominador e, a seguir, procede-se como no caso anterior.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}$$

Determine a soma:

1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
2) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$
3) $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$
4) $\frac{3}{16} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{3}{16} + \frac{10}{16} + \frac{12}{16} = \frac{25}{16}$
5) $\frac{4}{10} + \frac{2}{5} + \frac{7}{20} = \frac{8}{20} + \frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{23}{20}$
6) $\frac{3}{14} + \frac{5}{21} = \frac{9}{42} + \frac{10}{42} = \frac{19}{42}$

SUBTRAÇÃO

Denominadores iguais

Conserva-se o denominador e subtraem-se os numeradores.

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$$

minuendo subtraendo diferença

Efetue as operações:

1) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

2) $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

3) $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$

4) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

5) $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

6) $\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$

7) $\frac{7}{15} - \frac{3}{15} = \frac{4}{15}$

8) $\frac{23}{100} - \frac{15}{100} = \frac{8}{100}$

9) $\frac{8}{17} - \frac{5}{17} = \frac{3}{17}$

10) $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12}$

11) $\frac{11}{40} - \frac{7}{40} = \frac{4}{40}$

12) $\frac{17}{20} - \frac{7}{20} = \frac{10}{20}$

Denominadores diferentes

Obtém-se, em primeiro lugar, frações equivalentes com o mesmo denominador e, a seguir, procede-se como no caso anterior.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$$

Determine a diferença:

1) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$

2) $\frac{7}{8} - \frac{3}{5} = \frac{35}{40} - \frac{24}{40} = \frac{11}{40}$

3) $\frac{5}{14} - \frac{7}{21} = \frac{15}{42} - \frac{14}{42} = \frac{1}{42}$

4) $\frac{7}{10} - \frac{3}{5} = \frac{7}{10} - \frac{6}{10} = \frac{1}{10}$

5) $\frac{5}{9} - \frac{1}{6} = \frac{10}{18} - \frac{3}{18} = \frac{7}{18}$

6) $\frac{9}{15} - \frac{7}{20} = \frac{36}{60} - \frac{21}{60} = \frac{15}{60}$

DOIS CASOS ESPECIAIS: NÚMERO NATURAL E NUMERAL MISTO

Veja os exemplos:

$$2 + \frac{3}{5} = \frac{2}{1} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

$$2\frac{1}{4} - \frac{5}{8} = \frac{9}{4} - \frac{5}{8} = \frac{18}{8} - \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$$

Efetue as operações:

1) $3 - \frac{2}{3} = \frac{3}{1} - \frac{2}{3} = \frac{9}{3} - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

2) $2 - 1\frac{2}{5} = \frac{2}{1} - \frac{7}{5} = \frac{10}{5} - \frac{7}{5} = \frac{3}{5}$

3) $3\frac{1}{9} - \frac{5}{6} = \frac{28}{9} - \frac{5}{6} = \frac{56}{18} - \frac{15}{18} = \frac{41}{18}$

4) $1\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$

5) $4 + 2\frac{3}{5} = \frac{4}{1} + \frac{13}{5} = \frac{20}{5} + \frac{13}{5} = \frac{33}{5}$

6) $2\frac{3}{7} - 1 = \frac{17}{7} - \frac{1}{1} = \frac{17}{7} - \frac{7}{7} = \frac{10}{7}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete adequadamente:

1) $\frac{4}{9} \notin \mathbb{N}$

2) $\frac{3}{11} \in \mathbb{Q}_+$

3) Na operação: $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, a fração $\frac{7}{2}$ recebe o nome de *soma*.

4) Na operação: $3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, a fração $\frac{5}{2}$ recebe o nome de *diferença*.

5) $\left\{\frac{1}{4}\right\} \subset$ {números fracionários}

6) Na operação: $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, a fração $\frac{2}{3}$ recebe o nome de *minuendo*.

b) Coloque no □ os sinais + ou −, de modo que as sentenças se tornem verdadeiras:

1) $\frac{3}{5}$ [+] $\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

2) $\frac{4}{7}$ □ $\frac{2}{7} = \frac{2}{7}$

3) $\frac{3}{5}$ [+] $\frac{2}{5} = 1$

4) $\frac{1}{4}$ □ $\frac{1}{4} = 0$

5) $3\frac{1}{2}$ □ $\frac{1}{2} = 3$

6) $\frac{7}{2}$ [+] $\frac{1}{2} = 4$

c) Efetue as operações indicadas nas expressões aritméticas:

1) $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

2) $\frac{7}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$

3) $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

4) $\frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{4}{40}$ $\frac{2}{5}$

5) $\frac{5}{12} + \frac{7}{12} - \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12}$ $\frac{3}{4}$

6) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{10}{20} + \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$

7) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} + \frac{10}{12} = \frac{11}{12}$

8) $\frac{5}{8} + 1 - \frac{1}{6} + 1\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{5}{3} = \frac{15}{24} + \frac{24}{24} - \frac{4}{24} + \frac{40}{24} = \frac{75}{24}$ $\frac{25}{8}$

9) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{8}{10} = \frac{6}{10} + \frac{2}{10} - \frac{8}{10} = 0$

10) $4 - 3\frac{4}{7} + \frac{1}{14} = \frac{4}{1} - \frac{25}{7} + \frac{1}{14} = \frac{56}{14} - \frac{50}{14} + \frac{1}{14} = \frac{7}{14}$ $\frac{1}{2}$

MULTIPLICAÇÃO

Multiplicam-se os numeradores entre si e também os denominadores entre si.

Observe:

$$\boxed{\frac{2}{5}} \times \boxed{\frac{3}{4}} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

fatores — produto

$$\boxed{3} \times \frac{4}{7} = \boxed{\frac{3}{1}} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{7}$$

$$\boxed{3\frac{1}{2}} \times \frac{5}{9} = \boxed{\frac{7}{2}} \times \frac{5}{9} = \frac{35}{18}$$

Efetue as operações:

1) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

2) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

3) $\frac{2}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{35}$

4) $\frac{5}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{32}$

5) $\frac{7}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{18}$

6) $5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

7) $3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$

8) $2\frac{1}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{7}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

9) $1\frac{1}{10} \times 2 = \frac{11}{10} \times \frac{2}{1} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$

10) $2\frac{3}{4} \times 1\frac{4}{7} = \frac{11}{4} \times \frac{11}{7} = \frac{121}{28}$

11) $\frac{9}{10} \times 3 = \frac{27}{10}$

12) $\frac{25}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{25}{36}$

13) $\frac{11}{30} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{90}$

14) $\frac{4}{15} \times 2\frac{1}{2} = \frac{4}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

15) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

16) $3\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{2} = \frac{13}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{39}{8}$

MULTIPLICAÇÃO ENTRE VÁRIAS FRAÇÕES

Quando multiplicamos várias frações, podemos simplificá-las antes de efetuar a multiplicação.

Veja:

$$\frac{\not{4}^{2}}{\not{10}_{5}} \times \frac{7}{9} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{14}{45} \qquad \frac{2}{\not{3}_{1}} \times \frac{\not{6}^{2}}{5} \times \frac{7}{11} = \frac{28}{55} \qquad \frac{\not{4}^{1}}{\not{5}_{1}} \times \frac{3}{7} \times \frac{\not{15}^{3}}{\not{8}_{2}} = \frac{9}{14}$$

Efetue as operações:

1) $\frac{1}{4} \times \frac{12}{15} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$

2) $\frac{3}{5} \times \frac{15}{14} \times \frac{21}{11} = \frac{27}{22}$

3) $\frac{16}{21} \times \frac{3}{20} \times \frac{15}{4} = \frac{3}{7}$

4) $\frac{11}{6} \times \frac{9}{22} = \frac{3}{4}$

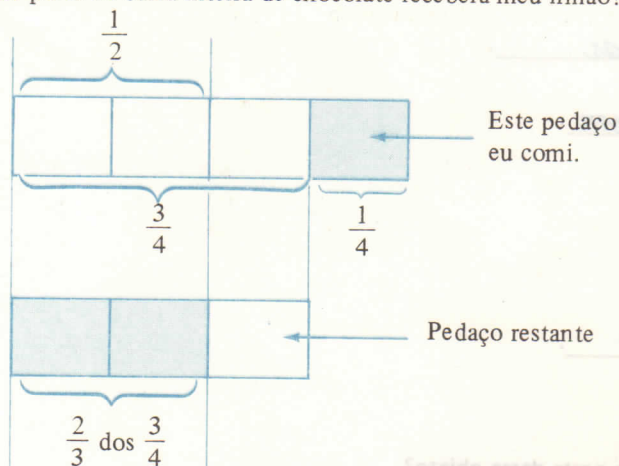
5) $\frac{15}{64} \times \frac{48}{21} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{56}$

6) $\frac{10}{21} \times \frac{28}{100} \times \frac{20}{14} = \frac{4}{21}$

FRAÇÃO DE FRAÇÃO

Considere o seguinte problema:

Comi um pedaço de chocolate correspondente a $\frac{1}{4}$ da barra toda. Do chocolate restante, quero dar $\frac{2}{3}$ a meu irmão. Que parte da barra inteira de chocolate receberá meu irmão?

Este pedaço darei a meu irmão. Note que ele corresponde à metade do chocolate todo.

Então:

$\frac{2}{3}$ dos $\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}$

Você conhecerá imediatamente o resultado de uma fração de fração efetuando a multiplicação:

$\frac{{}^{1}\not{2}}{\not{3}_{1}} \times \frac{\not{3}^{1}}{\not{4}_{2}} = \frac{1}{2}$

Determine:

1) $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

2) $\frac{3}{4}$ dos $\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

4) $\frac{2}{5}$ dos $\frac{5}{8} \Rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$

5) $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

6) $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

FRAÇÕES INVERSAS

São frações em que o numerador de uma é o denominador da outra e vice-versa.

$\frac{5}{4}$ e $\frac{4}{5}$ são frações inversas. O produto de duas frações inversas é sempre 1.

Veja:

$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{20}{20} = 1$

Escreva a fração inversa de:

1) $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$

2) $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{1}$

3) $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$

4) 3, $\frac{1}{3}$

5) $\frac{3}{10}$, $\frac{10}{3}$

6) $\frac{7}{3}$, $\frac{3}{7}$

7) 2, $\frac{1}{2}$

8) $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{1}$

9) 10, $\frac{1}{10}$

Logo, se $x \in N^*$, ou seja, $x \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, a fração inversa será: $\frac{1}{x}$.

Não existe a fração inversa de 0 (zero).

a) Complete adequadamente:

1) Na operação $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ são os *fatores* e $\frac{1}{3}$ é o *produto*.

2) As frações $\frac{5}{9}$ e $\frac{9}{5}$ são chamadas de frações *inversas*.

3) O produto de duas frações inversas é sempre igual a *um*.

4) A fração inversa de $3\frac{1}{4}$ é $\frac{4}{13}$

5) A fração inversa de $1\frac{1}{5}$ é $\frac{5}{6}$.

6) Não existe a fração inversa do número natural *zero*.

b) Resolva:

1) A metade da metade de um objeto, corresponde a que parte desse objeto?

Metade: $\frac{1}{2}$ — *metade da metade*

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2) A que parte de um objeto corresponde a metade da terça parte desse objeto?

Terça parte: $\frac{1}{3}$ — *metade da terça parte*

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

3) Uma maçã foi dividida ao meio. Lígia comeu $\frac{1}{4}$ da metade. Que fração representa a parte da maçã que Lígia comeu?

$\frac{1}{4}$ da metade

$\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

c) Complete de modo que as sentenças se tornem verdadeiras:

1) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$ 2) $\frac{5}{11} \times \frac{11}{5} = 1$ 3) $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ 4) $\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$

5) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$ 6) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$ 7) $\frac{5}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$ 8) $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 2\frac{1}{4}$

DIVISÃO

Multiplica-se a primeira fração pela fração inversa da segunda.

Efetue as divisões:

1) $\frac{5}{2}:\frac{3}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$

2) $\frac{2}{3}:5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

3) $\frac{4}{5}:\frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$

4) $\frac{1}{3}:\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$

5) $\frac{2}{3}:\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$

6) $\frac{1}{4}:\frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{1} = 2$

Havendo numeral misto, deve-se transformá-lo em fração imprópria.

$$2\frac{1}{3} : \frac{3}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{28}{9}$$

Complete:

1) $1\frac{1}{5}:\frac{2}{3} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

2) $3\frac{1}{4}:\frac{1}{2} = \frac{13}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{13}{2}$

3) $5 : 1\frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{5} = 3$

4) $2 : 2\frac{1}{4} = 2 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$

5) $1\frac{1}{3} : 1\frac{1}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$

6) $\frac{4}{5} : 2\frac{1}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{15} = \frac{28}{75}$

7) $\frac{5}{8} : 4\frac{2}{5} = \frac{5}{8} \times \frac{5}{22} = \frac{25}{176}$

8) $3\frac{1}{5} : 8 = \frac{16}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{2}{5}$

O traço de fração indica divisão.

Observe:

$$8 : 2 = 8 \times \frac{1}{2} = \frac{8}{2}$$

Deste modo conclui-se que, no conjunto $\mathbb{Q}_+$, a divisão sempre admitirá um quociente exato, desde que o divisor seja diferente de zero.

Veja outros exemplos:

$7 : 9 = \frac{7}{9}$ $\qquad \frac{2}{3}:\frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$ $\qquad \frac{4}{5}:2 = \frac{\frac{4}{5}}{2}$ $\qquad 3 : \frac{3}{4} = \frac{3}{\frac{3}{4}}$

Dê o quociente em forma de fração:

1) $2 : 3 = \frac{2}{3}$

2) $10 : 9 = \frac{10}{9}$

3) $1 : 7 = \frac{1}{7}$

4) $7 : 8 = \frac{7}{8}$

5) $8 : 3 = \frac{8}{3}$

6) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$

7) $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{15}$

8) $1 : 2 = \dfrac{1}{2}$

9) $9 : 11 = \dfrac{9}{11}$

10) $4 : 5 = \dfrac{4}{5}$

11) $5 : 1 = \dfrac{5}{1}$

12) $7 : 100 = \dfrac{7}{100}$

13) $\dfrac{2\frac{1}{5}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{11}{5} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{44}{15}$

14) $\dfrac{5}{4\frac{2}{3}} = 5 \times \dfrac{3}{14} = \dfrac{15}{14}$

15) $\dfrac{1\frac{2}{7}}{3} = \dfrac{9}{7} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{7}$

POTENCIAÇÃO

Eleva-se uma fração a uma potência, elevando-se numerador e denominador a essa mesma potência.

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2} = \boxed{?}$ — 2: expoente; $\frac{3}{5}$: base; ?: potência

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3 \times 3}{5 \times 5} = \dfrac{3^2}{5^2} = \dfrac{9}{25}$

Ache a potência:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ 4) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

5) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$ 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ 7) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ 8) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$

9) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ 10) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{125}{343}$ 11) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 12) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

13) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$ 14) $\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$ 15) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$

Observações

a) Havendo numeral misto, deve-se transformá-lo em fração imprópria.

$\left(2\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7^2}{3^2} = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$

b) Potência de uma fração quando o expoente é zero.

$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ $\qquad$ $\left(3\frac{1}{4}\right)^0 = 1$

c) Potência de uma fração quando o expoente é um.

$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\left(3\frac{1}{4}\right)^1 = 3\frac{1}{4}$

Efetue a potenciação:

1) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

2) $\left(2\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{25}$

3) $\left(4\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

4) $\left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{4}{5}$

5) $\left(3\frac{1}{7}\right)^2 = \left(\frac{22}{7}\right)^2 = \frac{484}{49}$

6) $\left(\frac{5}{8}\right)^0 = 1$

7) $\left(5\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$

8) $\left(5\frac{1}{9}\right)^0 = 1$

9) $\left(5\frac{1}{9}\right)^1 = 5\frac{1}{9} = \frac{46}{9}$

10) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete:

1) Na operação $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$, o resultado $\frac{4}{3}$ recebe o nome de quociente.

2) Na operação $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, o resultado $\frac{1}{8}$ recebe o nome de potência.

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{0} = 1$

4) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{7}{3}$

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9}$

6) $\frac{4}{7} : \frac{4}{7} = 1$

7) $\frac{9}{10} : 1 = \frac{9}{10}$

8) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

9) $\left(\frac{9}{13}\right)^1 = \frac{9}{13}$

10) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$

b) Efetue as operações indicadas:

1) $\frac{1}{6} : \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{6}$

2) $\frac{3}{8} : \frac{9}{16} = \frac{3}{8} \times \frac{16}{9} = \frac{2}{3}$

3) $\frac{11}{13} : 2 = \frac{11}{13} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{26}$

4) $3 : \frac{8}{9} = 3 \times \frac{9}{8} = \frac{27}{8}$

5) $4\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \times \frac{2}{1} = 9$

6) $3\frac{1}{2} : 2 = \frac{7}{2} : 2 = \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$

7) $6 : 1\frac{9}{10} = 6 : \frac{19}{10} = \frac{6}{1} \times \frac{10}{19} = \frac{60}{19}$

8) $3\frac{1}{8} : 2\frac{1}{8} = \frac{25}{8} : \frac{17}{8} = \frac{25}{8} \times \frac{8}{17} = \frac{25}{17}$

9) $\left(3\frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{25}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}$

10) $\left(1\frac{1}{10}\right)^0 = 1$

11) $\dfrac{\frac{11}{15}}{\frac{12}{33}} = \frac{11}{15} \times \frac{33}{12} = \frac{121}{60}$

12) $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{16}{21}} = \frac{4}{3} \times \frac{21}{16} = \frac{7}{4}$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES NO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

No conjunto $\mathbb{Q}_+$, continuam válidas todas as propriedades das operações estudadas no conjunto $\mathbb{N}$. Entretanto, surge mais uma propriedade: a existência do elemento inverso.

EXPRESSÕES ARITMÉTICAS

Dada uma expressão envolvendo números pertencentes ao conjunto $\mathbb{Q}_+$, devemos eliminar os parênteses, os colchetes e as chaves, efetuando as operações indicadas, na seguinte ordem:

Sinais	Operações
1.º) parênteses 2.º) colchetes 3.º) chaves	1.º) potenciação 2.º) multiplicação e divisão (na ordem dada) 3.º) adição e subtração (na ordem dada)

Veja um exemplo:

$$\frac{1}{2} : \left\{ \left[\left(3 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{5} - \frac{1}{8} : \frac{1}{4} \right] \times \frac{3}{4} + 1 \right\}$$

$$3 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\frac{1}{2} : \left\{ \left[\frac{16}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{8} : \frac{1}{4} \right] \times \frac{3}{4} + 1 \right\}$$

$$\frac{16}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{8} : \frac{1}{4} = \frac{33}{10}$$

$$\frac{1}{2} : \left\{ \frac{33}{10} \times \frac{3}{4} + 1 \right\}$$

$$\frac{33}{10} \times \frac{3}{4} + 1 = \frac{139}{40}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{139}{40} = \frac{1}{2} \times \frac{40}{139} = \frac{20}{139}$$

Efetue as operações indicadas:

1) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

2) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{7} - \frac{6}{21} = \frac{20}{21}$

3) $3 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 6$

4) $\frac{3}{5} : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{36}{35}$

5) $\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{10}{3}\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{9} : \frac{4}{18}\right) = \frac{173}{120}$

6) $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5}$

7) $\frac{3}{10} \times \frac{15}{7} + \left(\frac{1}{9}\right)^0 = \frac{23}{14}$

8) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(5\frac{1}{6}\right)^0 = \frac{11}{8}$

9) $\frac{3}{4} + \left[2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{6}{4}\right)\right] = \frac{9}{4}$

10) $\frac{5}{8} + \left\{\frac{2}{5} + \left[\left(\frac{4}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{45}\right]\right\} = \frac{101}{72}$

11) $\frac{3}{4} - \left[\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] : \frac{3}{5} = 0$

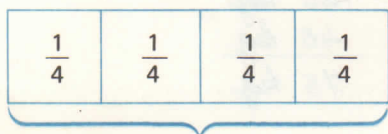
12) $2\frac{1}{4} - \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}\right] = 2$

13) $3\frac{1}{2} - \left\{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} : \frac{3}{2}\right] + \frac{2}{3}\right\} = \frac{5}{2}$

14) $\frac{1}{2} + \left[\frac{2}{7} + \frac{5}{7} - \left(\frac{2}{5}\right)^0\right] = \frac{1}{2}$

15) $\left[\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right) \times \frac{5}{7} + \frac{1}{4}\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}$

PROBLEMAS

1) Uma barra de chocolate custa Cr$ 20,00. Qual é o preço de $\frac{3}{4}$ dessa barra de chocolate?

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{4}{4}$ custam → Cr$ 20,00

$\frac{4}{4}$ custam → Cr$ 20,00 (: 4)

$\frac{1}{4}$ custará → Cr$ 5,00 (× 2)

$\frac{2}{4}$ custarão → Cr$ 10,00 (× 3)

$\frac{3}{4}$ custarão → Cr$ 15,00

Resposta: Cr$ 15,00.

2) Uma peça de tecido custa Cr$ 500,00. Quanto pagarei por $\frac{3}{5}$ dessa peça?

$\frac{5}{5}$ → Cr$ 500,00 (: 5)

$\frac{1}{5}$ → Cr$ 100,00 (× 3)

$\frac{3}{5}$ → Cr$ 300,00

Resposta: Cr$ 300,00.

3) Rogério ganhou Cr$ 300,00 e gastou $\frac{1}{6}$ dessa quantia comprando um carrinho. Quanto possui agora?

$\frac{6}{6}$ → Cr$ 300,00 (: 6)

$\frac{1}{6}$ → Cr$ 50,00

Cr$ 300,00 − Cr$ 50,00 = Cr$ 250,00

Resposta: Cr$ 250,00.

4) Comprei um objeto que pesa 80 kg. Quanto pesam $\frac{3}{4}$ desse objeto?

$\frac{4}{4}$ → 80 kg (: 4)

$\frac{1}{4}$ → 20 kg (× 3)

$\frac{3}{4}$ → 60 kg

Resposta: 60 kg.

5) A distância da cidade **A** à cidade **B** é de 350 km. Saindo de **A** em direção a **B**, já percorri $\frac{4}{7}$ dessa distância. Quantos quilômetros eu já percorri?

$\frac{7}{7} \longrightarrow 350$ km
$\frac{1}{7} \longrightarrow 50$ km ($: 7$)
$\frac{4}{7} \longrightarrow$ 200 km ($\times 4$)

Resposta: 200 km

6) Comprei um televisor por Cr$ 18 000,00. Dei $\frac{1}{9}$ dessa quantia de entrada, e o restante pagarei em 20 prestações. Quanto dei de entrada e qual o valor de cada prestação?

Resposta: Cr$ 2 000,00 e Cr$ 800,00.

7) Uma pessoa que pesa 120 kg faz um regime para emagrecer. Se ela emagrecer $\frac{3}{8}$ do seu peso inicial, com quantos quilogramas ficará?

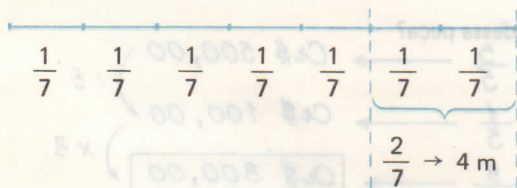
$\frac{8}{8} \longrightarrow 120$ kg
$\frac{1}{8} \longrightarrow 15$ kg ($: 8$)
$\frac{3}{8} \longrightarrow 45$ kg ($\times 3$)

120 kg − 45 kg = 75 kg

Resposta: 75 kg

8) $\frac{2}{7}$ do comprimento de uma vara são iguais a 4 metros. Qual é o comprimento da vara?

$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$

$\frac{2}{7} \rightarrow 4$ m

$\frac{2}{7}$ medem → 4 m
$\frac{1}{7}$ medirá → 2 m ($: 2$)
$\frac{7}{7}$ medirão → 14 m ($\times 7$)

Resposta: 14 m.

9) Recebi uma quantia da qual ainda me restam $\frac{5}{8}$. Sabendo que possuo Cr$ 1 500,00, que quantia recebi?

Resposta: Cr$ 2 400,00.

10) Gastei $\frac{3}{7}$ da mesada que recebi. Sabendo que ainda me restam Cr$ 180,00, qual é a minha mesada?

Resposta: *Cr$ 315,00.*

11) Um automóvel percorreu $\frac{3}{5}$ de uma estrada. Qual é o comprimento dessa estrada, sabendo que o automóvel percorreu 150 km?

$\frac{3}{5} \longrightarrow$ 150 km) : 3
$\frac{1}{5} \longrightarrow$ 50 km) × 5
$\frac{5}{5} \longrightarrow$ 250 km

Resposta: *250 km.*

12) Coloquei 240 litros de água num tanque. Sabendo que essa quantidade de água corresponde a $\frac{5}{12}$ de sua capacidade, quantos litros são necessários para encher o tanque?

$\frac{5}{12} \longrightarrow$ 240 ℓ) : 5
$\frac{1}{12} \longrightarrow$ 48 ℓ) × 12
$\frac{12}{12} \longrightarrow$ 576 ℓ

Resposta: *576 ℓ*

13) Comprei um objeto e dei de entrada Cr$ 600,00, que correspondem a $\frac{3}{10}$ do seu valor. Qual é o valor desse objeto? Pagando o restante em 20 prestações, qual será o valor de cada prestação?

$\frac{3}{10} \longrightarrow$ Cr$ 600,00) : 3
$\frac{1}{10} \longrightarrow$ Cr$ 200,00) × 10
$\frac{10}{10} \longrightarrow$ Cr$ 2 000,00

Cr$ 2 000,00 − Cr$ 600,00 = Cr$ 1 400,00 ; Cr$ 1 400,00 ÷ 20 = Cr$ 70,00

Resposta: *Cr$ 2.000,00 e Cr$ 70,00*

14) Um carro percorre, no primeiro dia de uma viagem, $\frac{3}{5}$ do percurso. No segundo dia percorre $\frac{2}{3}$ do que falta e, no terceiro dia, completa a viagem, percorrendo 600 km. Quantos quilômetros o carro percorreu?

1º dia: $\boxed{\frac{3}{5}}$; faltam portanto: $\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \boxed{\frac{2}{5}}$

2º dia: $\frac{2}{3}$ de $\boxed{\frac{2}{5}} \Longrightarrow \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{4}{15}}$

Nos dois primeiros dias percorreu:

$\boxed{\frac{3}{5}} + \boxed{\frac{4}{15}} = \frac{9}{15} + \frac{4}{15} = \frac{13}{15}$

1º dia 2º dia

3º dia: $\frac{15}{15} - \frac{13}{15} = \boxed{\frac{2}{15}} \longrightarrow$ 600 km) : 2

$\boxed{\frac{1}{15}} \longrightarrow$ 300 km) × 15

$\boxed{\frac{15}{15}} \longrightarrow$ 4 500 km

Resposta: 4 500 km.

15) Três irmãos receberam uma herança. Ao mais velho coube $\frac{1}{3}$ dessa herança. Ao mais jovem couberam $\frac{3}{4}$ do resto, ficando Cr$ 12 000,00 para o terceiro irmão. Qual é o valor total da herança?

Mais velho: $\boxed{\frac{1}{3}}$; faltam $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Mais jovem: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

3º irmão: Cr$ 12 000,00 ⟶ $\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ ⟶ Cr$ 12 000,00) × 6

$\frac{6}{6}$ ⟶ Cr$ 72 000,00

Resposta: Cr$ 72 000,00.

16) Lídia saiu de casa para fazer compras. Gastou $\frac{2}{7}$ do que possuía no supermercado e $\frac{1}{4}$ do que restou numa loja de tecidos. Chegou em casa com Cr$ 300,00. Com que quantia Lídia saiu de casa?

Supermercado: $\boxed{\frac{2}{7}}$; faltam $\frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

Loja: $\frac{1}{4} \times \frac{5}{7} = \boxed{\frac{5}{28}}$

$\frac{2}{7} + \frac{5}{28} = \frac{8}{28} + \frac{5}{28} = \frac{13}{28}$

$\frac{28}{28} - \frac{13}{28} = \frac{15}{28}$ ⟶ Cr$ 300,00) : 15

$\frac{1}{28}$ ⟶ Cr$ 20,00) × 28

$\frac{28}{28}$ ⟶ Cr$ 560,00

Resposta: Cr$ 560,00.

17) Um pedreiro fez no primeiro dia de trabalho $\frac{2}{9}$ de um muro. No segundo dia fez $\frac{5}{8}$ desse muro e, no terceiro dia, completou o muro, fazendo 220 centímetros. Qual o comprimento do muro?

Primeiro dia: $\frac{2}{9}$

Segundo dia: $\frac{5}{8}$

$\frac{2}{9} + \frac{5}{8} = \frac{16}{72} + \frac{45}{72} = \frac{61}{72}$

Terceiro dia: $\frac{72}{72} - \frac{61}{72} = \boxed{\frac{11}{72}}$ ⟶ 220 cm) : 11

$\frac{1}{72}$ ⟶ 20 cm) × 72

$\frac{72}{72}$ ⟶ 1 440 cm

Resposta: 1 440 cm ou 14,40 m.

18) Minha mãe foi fazer compras e levou uma certa quantia em dinheiro. $\frac{1}{8}$ dessa quantia foi gasto no açougue; no armazém, ela deixou $\frac{1}{4}$ do que possuía inicialmente; e, na farmácia, gastou a metade do dinheiro com que saíra de casa, sobrando-lhe ainda Cr$ 100,00. Qual era o valor da quantia inicial?

açougue: $\frac{1}{8}$

armazém: $\frac{1}{4}$

farmácia: $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$

$\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ ⟶ Cr$ 100,00) × 8

$\frac{8}{8}$ ⟶ Cr$ 800,00

Resposta: Cr$ 800,00.

19) Numa escola, $\frac{2}{3}$ dos alunos são mulheres. Sabendo que existem 600 alunos homens, qual é o número total de alunos dessa escola?

mulheres: $\frac{2}{3}$

homens: $\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \longrightarrow 600$) $\times 3$

$\frac{3}{3} \longrightarrow 1800$

Resposta: 1800.

20) Determine uma fração equivalente a $\frac{2}{3}$, cuja soma dos termos seja 45.

$\frac{2}{3} \rightarrow$ soma dos termos: $2 + 3 = 5$

$45 : 5 = 9$

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 9}{3 \times 9} = \frac{18}{27}$

Resposta: $\frac{18}{27}$.

21) Ache uma fração equivalente a $\frac{3}{7}$, cuja soma dos termos seja 60.

$\frac{3}{7} \longrightarrow 3 + 7 = 10$ $\frac{3}{7} = \frac{3 \times 6}{7 \times 6} = \frac{18}{42}$

$60 : 10 = 6$

Resposta: $\frac{18}{42}$.

22) Qual é a fração equivalente a $\frac{5}{13}$, cuja soma dos termos é igual a 216?

$\frac{5}{13} \longrightarrow 5 + 13 = 18$ $\frac{5}{13} = \frac{5 \times 12}{13 \times 12} = \frac{60}{156}$

$216 : 18 = 12$

Resposta: $\frac{60}{156}$.

23) Qual é a fração equivalente a $\frac{5}{8}$, cuja diferença de seus termos é 36?

$\frac{5}{8} \longrightarrow 8 - 5 = 3$ $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 12}{8 \times 12} = \frac{60}{96}$

$36 : 3 = 12$

Resposta: $\frac{60}{96}$.

24) Qual é a fração equivalente a $\frac{3}{10}$, cuja diferença de seus termos é 84?

$\frac{3}{10} \longrightarrow 10 - 3 = 7$ $\frac{3}{10} = \frac{3 \times 12}{10 \times 12} = \frac{36}{120}$

$84 : 7 = 12$

Resposta: $\frac{36}{120}$.

25) Uma torneira sozinha enche um reservatório em 5 horas. Outra torneira sozinha enche esse reservatório em 7 horas. Com as duas torneiras abertas, em quanto tempo o reservatório estará cheio?

Primeira torneira: $\frac{5}{5}$ do reservatório $\longrightarrow$ 5 h

$\frac{1}{5} \longrightarrow$ 1 h

Segunda torneira: $\frac{7}{7}$ do reservatório $\longrightarrow$ 7 h

$\frac{1}{7} \longrightarrow$ 1 h

Note que, em 1 h, a primeira torneira enche $\frac{1}{5}$ do reservatório, enquanto que a segunda torneira enche $\frac{1}{7}$.

Então, as duas juntas encherão: $\frac{1}{5} + \frac{1}{7}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{7}{35} + \frac{5}{35} = \boxed{\frac{12}{35}} \longrightarrow$ 1 h (60 min)

: 12

$\frac{1}{35} \longrightarrow$ 5 min

X 35

$\frac{35}{35} \longrightarrow$ 175 min

Resposta: 175 min ou 2 h 55 min.

26) Uma torneira enche um tanque em 4 h e outra, em 6 h. Estando as duas torneiras abertas, em quanto tempo o tanque estará cheio?

1ª) $\frac{4}{4} \longrightarrow$ 4 h

$\frac{1}{4} \longrightarrow$ 1 h

2ª) $\frac{6}{6} \longrightarrow$ 6 h

$\frac{1}{6} \longrightarrow$ 1 h

$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \boxed{\frac{5}{12}} \longrightarrow$ 1 h (60 min)

: 5

$\frac{1}{12} \longrightarrow$ 12 min

× 12

$\frac{12}{12} \longrightarrow$ 144 min

Resposta: 144 min ou 2 h 24 min

27) Uma torneira enche um tanque em 2 h e outra o esvazia em 3 h. Com as duas torneiras abertas, em quanto tempo o tanque estará cheio?

1ª) $\frac{2}{2} \longrightarrow$ 2 h

$\frac{1}{2} \longrightarrow$ 1 h

2ª) $\frac{3}{3} \longrightarrow$ 3 h

$\frac{1}{3} \longrightarrow$ 1 h

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \longrightarrow$ 1 h

× 6

$\frac{6}{6} \longrightarrow$ 6 h

Resposta: 6 h.

28) A idade de um filho é igual a $\frac{2}{7}$ da idade do pai. Qual é a idade de cada um, sabendo que juntos têm 72 anos?

Idade do pai $= \frac{7}{7}$

Idade do filho $= \frac{2}{7}$

$\frac{7}{7} + \frac{2}{7} = \boxed{\frac{9}{7}} \longrightarrow$ 72 anos

: 9

$\frac{1}{7} \longrightarrow$ 8 anos

× 2

$\frac{2}{7} \longrightarrow$ 16 anos

× 7

$\frac{7}{7} \longrightarrow$ 56 anos

Resposta: Pai: 56 anos; filho: 16 anos.

29) Pai e filho têm juntos 55 anos. Sendo a idade do filho $\frac{3}{8}$ da idade do pai, qual a idade de cada um?

Idade do pai $= \frac{8}{8}$

Idade do filho $= \frac{3}{8}$

$\frac{8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8} \longrightarrow 55$

: 11

$\frac{1}{8} \longrightarrow 5$

× 8   × 3

$\frac{8}{8} \longrightarrow 40$

$\frac{3}{8} \longrightarrow 15$

Resposta: Pai: 40 anos; filho: 15 anos.

30) A soma de um número com os seus $\frac{2}{5}$ é igual a 140. Qual é esse número?

Número: $\frac{5}{5}$

Então: $\frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \boxed{\frac{7}{5}} \longrightarrow$ 140

: 7

$\frac{1}{5} \longrightarrow$ 20

× 5

$\frac{5}{5} \longrightarrow$ 100

Resposta: 100.

31) Um número mais os seus $\frac{5}{9}$ é igual a 630. Qual é esse número?

$\frac{9}{9} + \frac{5}{9} = \frac{14}{9} \longrightarrow 630$

: 14

$\frac{1}{9} \longrightarrow 45$

× 9

$\frac{9}{9} \longrightarrow 405$

Resposta: 405.

32) A diferença entre um número e os seus $\frac{3}{8}$ é igual a 60. Qual é esse número?

$\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \longrightarrow 60$

: 5

$\frac{1}{8} \longrightarrow 12$

× 8

$\frac{8}{8} \longrightarrow 96$

Resposta: 96.

33) Comprei uma calça de Cr$ 600,00, dando de entrada uma quantia igual a um número cuja soma entre ele e os seus $\frac{5}{6}$ é 220. Em quantas prestações de Cr$ 20,00 devo pagar o restante?

$\frac{6}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6} \rightarrow 220$) : 11

$\frac{1}{6} \rightarrow 20$) × 6

$\frac{6}{6} \rightarrow 120$

entrada: Cr$ 120,00

600,00 − 120,00 = 480,00

480,00 ÷ 20,00 = 24

Resposta: Cr$ 120,00 e 24 prestações.

34) A soma entre a minha idade e os $\frac{3}{4}$ da idade de meu irmão gêmeo é igual a 35 anos. Há quantos anos eu nasci?

$\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \rightarrow 35$) : 7

$\frac{1}{4} \rightarrow 5$) × 4

$\frac{4}{4} \rightarrow 20$

Resposta: 20 anos.

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Responda adequadamente:

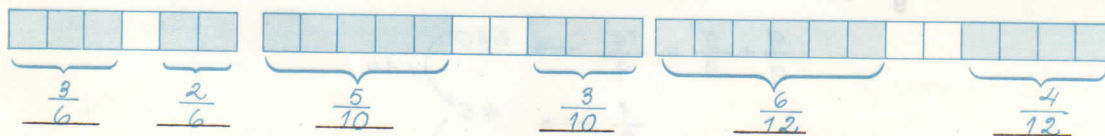
1) Um objeto é dividido em 8 partes iguais. Que numeral representa um pedaço desse objeto correspondente a 4 dessas partes iguais?

O numeral que representa um pedaço desse objeto é: $\frac{4}{8}$ ou $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.

Estes numerais são chamados: frações ordinárias próprias.

2) Na fração $\frac{3}{8}$, o 8 chama-se denominador e indica em quantas partes iguais o objeto foi dividido.

3) Dê as frações que representam as partes hachuradas.

$\frac{3}{6}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{4}{12}$

Agora indique quais são as frações equivalentes: $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$ e $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$.

4) Quando o denominador de uma fração for 10, 100, 1 000, etc., essa fração chama-se decimal.

5) Obtenha todas as frações equivalentes, até chegar à forma irredutível.

$\frac{24}{16} = \frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\frac{15}{165} = \frac{5}{55} = \frac{1}{11}$

$\frac{66}{78} = \frac{33}{39} = \frac{11}{13}$

$\frac{18}{54} = \frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

6) Se os termos de uma fração são primos entre si, ela é *irredutível*.

7) Coloque o sinal $>$, $<$ ou $=$ no □, de modo que as sentenças se tornem verdadeiras:

$\frac{3}{8}$ [>] $\frac{1}{8}$ $\quad$ $\frac{7}{5}$ [>] $\frac{5}{7}$ $\quad$ $\frac{7}{15}$ [<] $\frac{7}{13}$

$\frac{1}{4}$ [<] $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{3}{5}$ [<] $\frac{4}{5}$ $\quad$ $\frac{1}{3}$ [=] $\frac{14}{42}$

$\frac{5}{10}$ [=] $\frac{3}{6}$ $\quad$ $\frac{1}{7}$ [<] $\frac{4}{7}$ $\quad$ $\frac{1}{5}$ [<] $\frac{1}{3}$

b) Transforme em numeral misto:

1) $\frac{75}{43} = 1\frac{32}{43}$ $\quad$ 2) $\frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$ $\quad$ 3) $\frac{41}{20} = 2\frac{1}{20}$

4) $\frac{41}{4} = 10\frac{1}{4}$ $\quad$ 5) $\frac{63}{11} = 5\frac{8}{11}$ $\quad$ 6) $\frac{51}{10} = 5\frac{1}{10}$

7) $\frac{101}{100} = 1\frac{1}{100}$ $\quad$ 8) $\frac{53}{25} = 2\frac{3}{25}$ $\quad$ 9) $\frac{37}{2} = 18\frac{1}{2}$

c) Transforme em fração imprópria:

1) $5\frac{1}{41} = \frac{206}{41}$ $\quad$ 2) $10\frac{3}{10} = \frac{103}{10}$ $\quad$ 3) $6\frac{1}{12} = \frac{73}{12}$

4) $11\frac{11}{13} = \frac{154}{13}$ $\quad$ 5) $8\frac{1}{7} = \frac{57}{7}$ $\quad$ 6) $9\frac{1}{8} = \frac{73}{8}$

7) $1\frac{1}{50} = \frac{51}{50}$ $\quad$ 8) $20\frac{3}{10} = \frac{203}{10}$ $\quad$ 9) $15\frac{1}{2} = \frac{31}{2}$

d) Descubra o valor de **x**:

1) $\frac{4}{5} = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 24$ $\quad$ 2) $\frac{1}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 64$ $\quad$ 3) $\frac{12}{15} = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 48$

4) $\frac{x}{200} = \frac{1}{100} \Rightarrow x = 2$ $\quad$ 5) $\frac{2}{x} = \frac{18}{27} \Rightarrow x = 3$ $\quad$ 6) $\frac{x}{5} = \frac{72}{90} \Rightarrow x = 4$

e) Efetue as operações indicadas:

1) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

2) $\frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$

3) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$

4) $\frac{2}{5} \times \frac{11}{13} = \frac{22}{65}$

5) $\frac{1}{9} : \frac{7}{8} = \frac{1}{9} \times \frac{8}{7} = \frac{8}{63}$

6) $\frac{2}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$

7) $\frac{5}{3} - \frac{4}{15} : \frac{1}{5} = \frac{5}{3} - \frac{4}{15} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

8) $\frac{3}{2} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{14} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{7} \times \frac{14}{1} = 6$

9) $3\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \frac{16}{2} = 8$

10) $2\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5} = \frac{11}{5} - \frac{7}{5} = \frac{4}{5}$

f) Problemas:

1) Um saco de arroz pesa 60 kg. Qual é o peso de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ desse arroz? (30 kg)

2) Tenho Cr$ 600,00. Dando $\frac{2}{5}$ dessa quantia a meu irmão, com quanto ficarei? (Cr$ 360,00)

3) Durante o ano letivo você tem 720 aulas de matemática. Se você faltou a $\frac{1}{12}$ dessas aulas, a quantas aulas de matemática você compareceu? (660)

4) Um atleta demorou $\frac{3}{5}$ de minuto para percorrer certa distância. Qual é esse tempo, em segundos? (36 s)

5) Gastei $\frac{3}{4}$ do que possuía para comprar uma calça de Cr$ 210,00. Quanto tenho agora? Cr$ 70,00

6) Numa indústria, $\frac{5}{9}$ dos empregados são mulheres. Quantos empregados tem essa indústria, sabendo que do total de pessoas empregadas, 80 são homens? (180)

7) Recebi certa quantia, da qual gastei $\frac{1}{4}$. Do que restou, dei ao meu irmão $\frac{3}{10}$, ficando, ainda, com Cr$ 420,00. Qual foi a quantia que recebi? (Cr$ 800,00)

8) Marco e Rogério juntos têm 25 anos. Sabendo que a idade de Rogério corresponde a $\frac{2}{3}$ da idade de Marco, qual a idade de cada um? (Marco tem 15 anos e Rogério 10)

9) $3\frac{1}{4}$ de um objeto custam Cr$ 260,00. Quanto custa $1\frac{1}{8}$ desse objeto? (Cr$ 90,00)

10) Uma torneira enche um tanque em 4 horas, enquanto outra pode enchê-lo em 2 horas. Em quanto tempo as duas torneiras juntas encherão esse tanque? (80 min ou 1 h 20 min)

11) Dois irmãos têm juntos 48 anos. Sendo a idade do mais novo $\frac{3}{5}$ da idade do mais velho, descubra a idade de cada um. (30 e 18 anos)

12) Descubra a fração equivalente a $\frac{5}{8}$, cuja soma de seus termos seja 221. $\left(\frac{85}{136}\right)$

13) Uma certa quantia foi distribuída entre 4 pessoas. A primeira recebeu Cr$ 100,00, a segunda $\frac{1}{9}$, a terceira $\frac{2}{5}$ e a quarta $\frac{7}{15}$ dessa quantia. Quanto recebeu cada pessoa? (Cr$ 100,00; Cr$ 500,00; Cr$ 1800,00 e Cr$ 2100,00)

14) A soma de um número com os seus $\frac{3}{7}$ é igual a 450. Qual é esse número? (315)

15) Descubra qual é o número cuja diferença entre ele e seus $\frac{2}{9}$ é 224. (288)

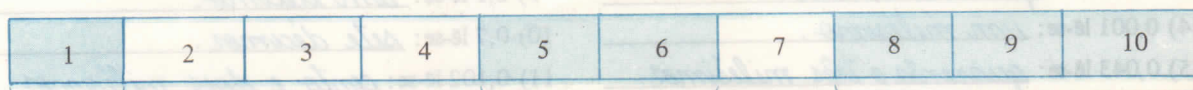
16) A soma de um número com os seus $\frac{2}{5}$ é igual a 315. Qual é esse número? (225)

17) A diferença entre um número e os seus $\frac{3}{4}$ é igual a 30. Qual é esse número? (120)

NUMERAIS DECIMAIS

OUTRA CLASSE DE NUMERAIS: OS NUMERAIS DECIMAIS

Suponha um objeto que foi dividido em dez partes iguais.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Esta parte do objeto é representada pelo numeral $\frac{1}{10}$.

Este pedaço do objeto é representado pelo numeral $\frac{2}{10}$.

Este pedaço do objeto é representado pelo numeral $\frac{3}{10}$.

Estas mesmas partes do objeto podem ser representadas por outra classe de numerais.

Veja:

$\frac{1}{10}$ é representado pelo símbolo: 0,1.

$\frac{2}{10}$ é representado pelo símbolo: 0,2.

$\frac{3}{10}$ é representado pelo símbolo: 0,3.

Esta nova simbologia (0,1 , 0,2, 0,3 etc.) constitui uma nova classe de numerais: **os numerais decimais.**

Nesta nova classe de numerais você encontra:

- uma vírgula;
- algarismos à esquerda da vírgula que constituem a **parte inteira**;
- algarismos à direita da vírgula, que constituem a **parte decimal**, sendo que cada algarismo recebe o nome de casa decimal.

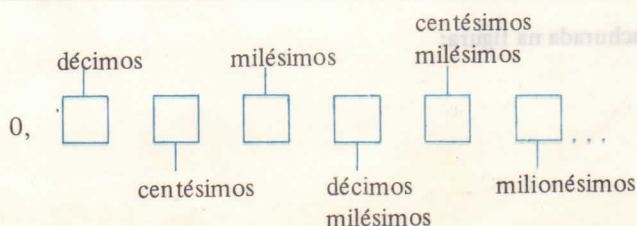
Parte Inteira **,** Parte Decimal

COMO SE LÊ UM NUMERAL DECIMAL

Se a parte inteira for nula

Lê-se a parte decimal, dando a designação da unidade correspondente ao último algarismo da direita.

0, □ □ □ □ □ □ ...

décimos — centésimos — milésimos — décimos milésimos — centésimos milésimos — milionésimos

Veja:

0,4 lê-se: quatro décimos.
0,25 lê-se: vinte e cinco centésimos.
0,005 lê-se: cinco milésimos.
0,0012 lê-se: doze décimos milésimos.

Complete:

1) 0,3 lê-se: três décimos.
2) 0,32 lê-se: trinta e dois centésimos.
3) 0,04 lê-se: quatro centésimos.
4) 0,001 lê-se: um milésimo.
5) 0,043 lê-se: quarenta e três milésimos.
6) 0,00008 lê-se: oito centésimos milésimos.
7) 0,34 lê-se: trinta e quatro centésimos.
8) 0,00006 lê-se: seis centésimos milésimos.
9) 0,1 lê-se: um décimo.
10) 0,7 lê-se: sete décimos.
11) 0,102 lê-se: cento e dois milésimos.
12) 0,000001 lê-se: um milionésimo.

Se a parte inteira não for nula

Lê-se, primeiramente, a parte inteira do numeral, acompanhada da palavra inteiro(s) e, em seguida, a parte decimal, como no caso anterior.

Observe:

1,3 lê-se: um inteiro e três décimos.
2,5 lê-se: dois inteiros e cinco décimos.
10,02 lê-se: dez inteiros e dois centésimos.
4,005 lê-se: quatro inteiros e cinco milésimos.
20,43 lê-se: vinte inteiros e quarenta e três centésimos.

Faça a leitura de:

1) 3,4 lê-se: três inteiros e quatro décimos.
2) 8,05 lê-se: oito inteiros e cinco centésimos.
3) 5,75 lê-se: cinco inteiros e setenta e cinco centésimos.
4) 2,001 lê-se: dois inteiros e um milésimo.
5) 4,1002 lê-se: quatro inteiros e um mil e dois décimos milésimos.
6) 100,7 lê-se: cem inteiros e sete décimos.
7) 1,8 lê-se: um inteiro e oito décimos.
8) 18,009 lê-se: dezoito inteiros e nove milésimos.
9) 7,00003 lê-se: sete inteiros e três centésimos milésimos.
10) 40,006 lê-se: quarenta inteiros e seis milésimos.
11) 1,000002 lê-se: um inteiro e dois milionésimos.
12) 1,0084 lê-se: um inteiro e oitenta e quatro décimos milésimos.

Indique no □, através de um numeral decimal, a parte hachurada na figura:

TRANSFORMAÇÕES DE NUMERAIS

Transformação de fração decimal em numeral decimal

> Coloca-se a vírgula no numeral correspondente ao numerador, com tantas casas decimais, contadas da direita para a esquerda, quantos forem os zeros do numeral correspondente ao denominador.

Agora observe os exemplos apresentados abaixo e, a seguir, complete os exercícios:

Transforme as frações decimais em numerais decimais:

1) $\frac{3}{10}$ = 0,3 2) $\frac{8}{100}$ = 0,08 3) $\frac{45}{10}$ = 4,5 4) $\frac{38}{100}$ = 0,38

5) $\frac{72}{1\,000}$ = 0,072 6) $\frac{1}{100}$ = 0,01 7) $\frac{1}{1\,000}$ = 0,001 8) $\frac{35}{1\,000}$ = 0,035

9) $\frac{2}{1\,000}$ = 0,002 10) $\frac{135}{1\,000}$ = 0,135 11) $\frac{1\,348}{100}$ = 13,48 12) $\frac{1\,348}{1\,000}$ = 1,348

13) $\frac{12}{10}$ = 1,2 14) $\frac{25}{10}$ = 2,5 15) $\frac{14}{10\,000}$ = 0,0014 16) $\frac{2\,518}{10\,000}$ = 0,2518

TRANSFORMAÇÃO DE NUMERAL DECIMAL EM FRAÇÃO DECIMAL

> Coloca-se, como numerador, o numeral sem a vírgula e, como denominador, a unidade seguida de tantos zeros quantas forem as casas decimais.

Veja:

$0{,}5 = \frac{05}{10} = \frac{5}{10}$ — 1 casa, 1 zero

$0{,}03 = \frac{003}{100} = \frac{3}{100}$ — 2 casas, 2 zeros

$2{,}8 = \frac{28}{10}$ — 1 casa, 1 zero

$1{,}258 = \frac{1\,258}{1\,000}$ — 3 casas, 3 zeros

Transforme os numerais decimais em frações decimais:

1) 0,2 = $\frac{2}{10}$ 2) 0,08 = $\frac{8}{100}$ 3) 1,3 = $\frac{13}{10}$

4) 2,75 = $\frac{275}{100}$ 5) 4,6 = $\frac{46}{10}$ 6) 3,5 = $\frac{35}{10}$

7) 1,269 = $\frac{1\,269}{1\,000}$ 8) 5,02 = $\frac{502}{100}$ 9) 0,0004 = $\frac{4}{10\,000}$

10) 2,2 = $\frac{22}{10}$ 11) 0,1 = $\frac{1}{10}$ 12) 0,825 = $\frac{825}{1\,000}$

PROPRIEDADES

Primeira propriedade:

Um numeral decimal representa o mesmo número quando se colocam ou se retiram zeros à direita de sua parte decimal.

Consideremos as frações: $\frac{2}{10}, \frac{20}{100}, \frac{200}{1\,000}$.

Agora observe:

$$\frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{10 \times 10} = \frac{20}{100} = \frac{20 \times 10}{100 \times 10} = \frac{200}{1\,000}$$

0,2 = 0,20 = 0,200

Segunda propriedade:

Ao multiplicar um numeral decimal por 10, 100, 1 000, etc., a vírgula se desloca uma, duas, três, etc. casas decimais para a direita.

Observe:

$$\frac{252}{100} \times 10 = \frac{2\,520}{100} = \frac{252}{10} \qquad \frac{2\,518}{1\,000} \times 100 = \frac{251\,800}{1\,000} = \frac{2\,518}{10}$$

2,52 → × 10 → 25,2 2,518 → × 100 → 251,8

Complete:

1) 2,54 × 10 = 25,4
2) 0,002 × 100 = 0,2
3) 1,274 × 10 = 12,74
4) 1,528 × 1 000 = 1 528
5) 0,00048 × 10 000 = 4,8
6) 0,008 × 1 000 = 8
7) 5,75 × 10 = 57,5
8) 0,00012 × 10 000 = 1,2
9) 1,25 × 10 = 12,5
10) 0,005 × 100 = 0,5
11) 1,35 × 10 = 13,5
12) 0,0017 × 1 000 = 1,7
13) 4,825 × 100 = 482,5
14) 0,00574 × 10 000 = 57,4
15) 2,008 × 100 = 200,8
16) 3,483 × 10 = 34,83

Observe estas multiplicações:

0,05 × 100 = 0,05 = 5 0,2 × 1 000 = 0,200 = 200

Efetue:

1) 0,25 × 100 = 25
2) 2,3 × 10 = 23
3) 0,002 × 1 000 = 2
4) 1,75 × 1 000 = 1 750
5) 0,5 × 100 = 50
6) 0,08 × 1 000 = 80
7) 1,5 × 10 000 = 15 000
8) 5,2 × 10 = 52
9) 0,035 × 1 000 = 35

Terceira propriedade:

Ao se dividir um númeral decimal por 10, 100, 1 000, etc., a vírgula se desloca uma, duas, três, etc. casas decimais para a esquerda.

Efetue:

1) 2,4 : 10 = 0,24
2) 0,05 : 10 = 0,005
3) 12,8 : 10 = 1,28
4) 15,6 : 100 = 0,156
5) 1 238,2 : 1 000 = 1,2382
6) 0,3 : 100 = 0,003
7) 0,12 : 1 000 = 0,00012
8) 125,3 : 1 000 = 0,1253
9) 5,4 : 100 = 0,054

Agora observe:

20 : 100 = 0,20, = 0,20 = 0,2

500 : 1 000 = 0,500, = 0,500 = 0,5

Complete:

1) 5 : 100 = 0,05
2) 150 : 1 000 = 0,15
3) 200 : 1 000 = 0,2
4) 10 : 100 = 0,1
5) 2 000 : 100 = 20
6) 82 : 10 = 8,2
7) 1 500 : 1 000 = 1,5
8) 40 : 100 = 0,4
9) 5 400 : 1 000 = 5,4

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete:

1) 0,9 lê-se: nove décimos.
3) 0,006 lê-se: seis milésimos.
4) 4,001 lê-se: quatro inteiros e um milésimo.
5) 0,56 lê-se: cinqüenta e seis centésimos.

b) Escreva o numeral decimal correspondente:

1) Dois centésimos: 0,02
2) Cinco milésimos: 0,005
4) Três inteiros e oito milésimos: 3,008
5) Seis inteiros e cinco centésimos: 6,05

c) Transforme em numerais decimais:

1) $\frac{425}{10}$ = 42,5
2) $\frac{512}{100}$ = 5,12
3) $\frac{512}{1\,000}$ = 0,512
4) $\frac{1\,538}{1\,000}$ = 1,538
5) $\frac{6}{1\,000}$ = 0,006
6) $\frac{47}{10}$ = 4,7
7) $\frac{12}{10\,000}$ = 0,0012
8) $\frac{25348}{100}$ = 253,48

d) Transforme em frações decimais:

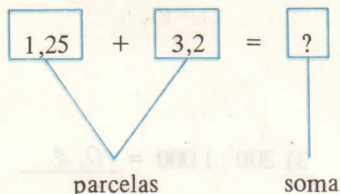
1) 0,0015 = $\frac{15}{10\,000}$
2) 0,85 = $\frac{85}{100}$
3) 5,9 = $\frac{59}{10}$
4) 1,05 = $\frac{105}{100}$
5) 0,019 = $\frac{19}{1000}$
6) 0,79 = $\frac{79}{100}$
7) 0,0295 = $\frac{295}{10\,000}$
8) 5,125 = $\frac{5\,125}{1000}$

e) Efetue as operações:

1) 0,5 × 100 = 50
2) 0,5 : 100 = 0,005
3) 2,51 × 10 = 25,1
4) 2,51 : 10 = 0,251
5) 125,8 × 1 000 = 125 800
6) 125,8 : 1 000 = 0,1258
7) 12 × 100 = 1 200
8) 12 : 100 = 0,12
9) 1,23 × 100 = 123
10) 1,23 : 100 = 0,0123
11) 6 × 1 000 = 6 000
12) 6 : 1 000 = 0,006

OPERAÇÕES: ADIÇÃO

Disposição prática: Colocam-se os numerais decimais uns sob os outros de modo que as vírgulas fiquem uma embaixo da outra. A seguir, efetua-se a adição.

Veja:

Disposição certa

```
 1,25 +
 3,20
 ----
 4,45
```

Disposição errada

```
1,25 +
  3,2
```

Efetue:

1) 2,13 + 0,4 = 2,53

Disposição: 2,13 + 0,4 = 2,53

2) 0,054 + 1,2 = 1,254

Disposição: 0,054 + 1,2 = 1,254

3) 12,04 + 0,152 = 12,192

Disposição: 12,04 + 0,152 = 12,192

4) 15,32 + 4 = 19,32

Disposição: 15,32 + 4,00 = 19,32

5) 0,004 + 1,006 = 1,010

Disposição: 0,004 + 1,006 = 1,010

6) 152 + 1,45 = 153,45

Disposição: 152,00 + 1,45 = 153,45

7) 1,3 + 0,08 + 13,5 = 14,88

Disposição: 1,30 + 0,08 + 13,50 = 14,88

8) 0,12 + 5 + 14,88 = 20

Disposição: 0,12 + 5,00 + 14,88 = 20,00

9) 0,001 + 2,5 + 2 = 4,501

Disposição: 0,001 + 2,500 + 2,000 = 4,501

SUBTRAÇÃO

Disposição prática: Colocam-se os numerais decimais um sob o outro, de modo que as vírgulas fiquem uma embaixo da outra. A seguir, efetua-se a subtração.

Observe:

Disposição certa	**Disposição errada**
5,100 – 0,458 4,462	5,1 – 0,458

Encontre a diferença:

1) 2,35 – 1,429 = 0,921

Disposição
2,350   1,429 –   0,921

2) 0,054 – 0,0257 = 0,0283

Disposição
0,0540   0,0257 –   0,0283

3) 0,4 – 0,008 = 0,392

Disposição
0,400   0,008 –   0,392

4) 5,76 – 3 = 2,76

Disposição
5,76   3,00 –   2,76

5) 12 – 9,41 = 2,59

Disposição
12,00   9,41 –   2,59

6) 2,547 – 1,5 = 1,047

Disposição
2,547   1,500 –   1,047

MULTIPLICAÇÃO

Disposição prática: Colocam-se os numerais decimais um sob o outro e efetua-se a multiplicação como se fossem números inteiros. No resultado encontrado, coloca-se a vírgula com tantas casas decimais quantas forem as dos fatores.

Veja:

Achar o produto:

1) 2,5 × 0,2 = 0,5

Disposição
2,5 × 0,2 0,50

2) 3,12 × 0,05 = 0,156

Disposição
3,12 × 0,05 0,1560

3) 1,45 × 3 = 4,35

Disposição
1,45 × 3 4,35

4) 4,2 × 0,1 = 0,42

Disposição
4,2 × 0,1 0,42

5) 1,205 × 0,07 = 0,08435

Disposição
1,205 × 0,07 0,08435

6) 5 × 1,2 = 6

Disposição
1,2 × 5 6,0

7) 64 × 0,04 = 2,56

Disposição
64 × 0,04 2,56

8) 2,8 × 1,7 = 4,76

Disposição
2,8 × 1,7 196 28 4,76

9) 5,32 × 4,8 = 25,536

DIVISÃO

Divisão exata

a) Divisão com numerais de números inteiros

Exemplos:

1) Dividir 20 por 8

1.º passo	2.º passo	3.º passo
20 | 8 4 2	20 | 8 40 2, Observe a colocação da vírgula no quociente e do zero no resto.	20 | 8 40 2,5 0

2) Dividir 30 por 16

<table>
<tr><th>1.º passo</th><th>2.º passo</th><th>3.º passo</th><th>4.º passo</th></tr>
<tr><td>30 | 16
14   1</td><td>30 | 16
140   1,</td><td>30 | 16
140   1,8
12</td><td>30 | 16
140   1,8
120</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>5.º passo</th><th>6.º passo</th><th>7.º passo</th></tr>
<tr><td>30 | 16
140   1,87
120
08</td><td>30 | 16
140   1,87
120
080</td><td>30 | 16
140   1,875
120
080
00</td></tr>
</table>

30 : 16 = 1,875

3) Dividir 12 por 15

<table>
<tr><th>1.º passo</th><th>2.º passo</th><th>3.º passo</th></tr>
<tr><td>12 | 15
0</td><td>120 | 15
0,</td><td>120 | 15
00   0,8</td></tr>
</table>

12 : 15 = 0,8

4) Dividir 18 por 225

<table>
<tr><th>1.º passo</th><th>2.º passo</th><th>3.º passo</th><th>4.º passo</th></tr>
<tr><td>18 | 225
0</td><td>180 | 225
0,</td><td>1800 | 225
0,0</td><td>1800 | 225
000   0,08</td></tr>
</table>

18 : 225 = 0,08

Ache o quociente de:

1) 45 · 12 = 3,75   2) 627 : 150 = 4,18   3) 213 : 15 = 14,2   4) 714 : 35 = 20,4

<table>
<tr><th>Disposição</th><th>Disposição</th><th>Disposição</th><th>Disposição</th></tr>
<tr><td>45 | 12
090   3,75
060
00</td><td>627 | 150
0270   4,18
1200
000</td><td>213 | 15
63   14,2
030
00</td><td>714 | 35
0140   20,4
00</td></tr>
</table>

5) 24 : 200 = 0,12   6) 3 : 50 = 0,06   7) 2 : 5 = 0,4   8) 1 : 40 = 0,025

Disposição	Disposição	Disposição	Disposição
240 ⌊200 0400 0,12 000	300 ⌊50 00 0,06	20 ⌊5 0 0,4	100 ⌊40 200 0,025 00

b) Divisão com numerais decimais

Exemplos:

1) Dividir 2,4 por 0,12

1.º passo	2.º passo	3.º passo
2 casas 2,40 ⌊ 0,12 Igualar as casas decimais.	2,40 ⌊ 0,12 Eliminar as vírgulas.	240 ⌊ 12 000 20

2,4 : 0,12 = 20

2) Dividir 1,25 por 2,5

1.º passo	2.º passo
1,25 ⌊ 2,50	1250 ⌊ 250 000 0,5

1,25 : 2,5 = 0,5

3) Dividir 1,254 por 3

1.º passo	2.º passo
1,254 ⌊ 3,000	12540 ⌊ 3000 05400 0,418 24000 0000

1,254 : 3 = 0,418

4) Dividir 4 por 1,25

1.º passo	2.º passo
4,00 ⌊ 1,25	400 ⌊ 125 0250 3,2 000

4 : 1,25 = 3,2

Efetue as divisões:

1) 1,8 : 0,12 = 15 2) 2,4 : 0,8 = 3 3) 0,9 : 0,45 = 2 4) 1,47 : 3 = 0,49

Disposição	Disposição	Disposição	Disposição
1,80 ⌊0,12 60 15 00	2,4 ⌊0,8 0 3	0,90 ⌊0,45 0 2	1,470 ⌊3,00 2700 0,49 000

5) 0,9 : 0,06 = 15 6) 1,2 : 0,05 = 24 7) 0,18 : 3,6 = 0,05 8) 2,5872 : 12 = 2,156

Disposição	Disposição	Disposição	Disposição
0,90 ⌊0,06 30 15 0	1,20 ⌊0,05 20 24 0	0,1800 ⌊3,60 000 0,05	2,5872 ⌊1,2000 018720 2,156 67200 72000 00000

Divisão não-exata

Exemplos:

1) Dividir 48 por 256

1.º passo	2.º passo	3.º passo	4.º passo	5.º passo
48 ⌊256 0	480 ⌊256 224 0,1	480 ⌊256 2240 0,18 192	480 ⌊256 2240 0,187 1920 128	480 ⌊256 2240 0,1875 1920 1280 000
Quociente aproximado a menos de 1.	Quociente aproximado a menos de 0,1.	Quociente aproximado a menos de 0,01.	Quociente aproximado a menos de 0,001.	Quociente exato.

2) Dividir 11,052 por 4,5

1.º passo	2.º passo	3.º passo	4.º passo	5.º passo
11,052 ⌊4,500	11052 ⌊4500 2052 2	11052 ⌊4500 20520 2,4 2520	11052 ⌊4500 20520 2,45 25200 2700	11052 ⌊4500 20520 2,456 25200 27000 0000
Igualar as casas decimais e eliminar as vírgulas.	Quociente aproximado a menos de 1.	Quociente aproximado a menos de 0,1.	Quociente aproximado a menos de 0,01.	Quociente exato.

AGORA VAMOS EXERCITAR

a) Achar o quociente aproximado por falta a menos de 1 (uma unidade):

1) 4 : 5 = 0 2) 1,6 : 0,03 = 53 3) 0,078 : 0,015 = 5
4) 2 : 5 = 0 5) 0,294 : 0,12 = 2 6) 19 : 5 = 3
7) 23,8 : 5 = 4 8) 23 : 4 = 5 9) 4,6 : 0,8 = 5

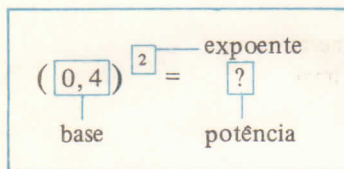
b) Achar o quociente aproximado por falta a menos de 0,1 (um décimo):

1) 0,294 : 0,12 = 2,4 2) 23,8 : 5 = 4,7 3) 27 : 4 = 6,7
4) 0,47 : 0,03 = 15,6 5) 2,57 : 0,2 = 12,8 6) 4,6 : 0,8 = 5,7
7) 12,6 : 3,1 = 4,0 8) 2,247 : 0,7 = 3,2 9) 9,968 : 1,4 = 7,1

c) Achar o quociente aproximado por falta a menos de 0,01 (um centésimo):

1) 0,0152 : 0,2 = 0,07 2) 3 : 7 = 0,42 3) 0,177 : 1,5 = 0,11
4) 0,3432 : 0,2 = 1,71 5) 2,7859 : 1,3 = 2,14 6) 8 : 3 = 2,66
7) 0,78834 : 1,4 = 0,56 8) 0,6012 : 0,6 = 1,00 9) 1,8135 : 0,9 = 2,01

POTENCIAÇÃO

Observe o exemplo:

Veja como se encontra a potência:

1.º) $(0,4)^2 = \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{16}{100} = 0,16$

2.º) $(0,4)^2 = 0,4 \times 0,4 = 0,16$

Ache a potência:

1) $(0,5)^2$ = 0,25 2) $(1,2)^2$ = 1,44 3) $(0,2)^3$ = 0,008
4) $(0,3)^4$ = 0,0081 5) $(1,5)^2$ = 2,25 6) $(0,11)^2$ = 0,0121
7) $(0,02)^3$ = 0,000008 8) $(1,42)^2$ = 2,0164 9) $(0,07)^2$ = 0,0049
10) $(1,2)^3$ = 1,728 11) $(0,1)^2$ = 0,01 12) $(0,01)^3$ = 0,000001

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Efetue as operações:

1) 2,8 + 1,22 = 4,02 2) 1,2 − 0,003 = 1,197 3) 4,2 × 0,02 = 0,084
4) 5 : 8 = 0,625 5) 0,01 : 0,4 = 0,025 6) 0,02 : 8 = 0,0025
7) $(0,01)^2$ = 0,0001 8) $(0,2)^4$ = 0,0016 9) $(0,6)^3$ = 0,216
10) 1,5 + 0,5 + 2 = 4 11) 10,72 + 0,2 + 0,08 = 11 12) 7 : 0,14 = 50
13) 1,251 × 100 = 125,1 14) 125,1 : 100 = 1,251 15) 0,001 × 1000 = 1

b) Ache o resultado destas operações, expressando-o em numeral decimal e em fração decimal:

1) 4,7 + 0,01 − 4,21 = 0,5 = $\frac{5}{10}$ 2) 1,2 × 0,05 + 0,04 = 0,1 = $\frac{1}{10}$

3) 4 : 8 + 1,5 × 0,4 − 1,07 = 0,03 = $\frac{3}{100}$ 4) $(0,2)^2 - (0,02)^2$ = 0,0396 = $\frac{396}{10000}$

5) 1,44 : 0,3 − 0,2 : 0,05 = 0,8 = $\frac{8}{10}$

c) Dê o quociente aproximado por falta a menos de 0,1:

1) 2 : 3 = 0,6 2) 1,74 : 1,2 = 1,4 3) 1,23 : 0,6 = 2,0

4) 4 : 0,7 = 5,7 5) 0,237 : 0,05 = 4,7 6) 1,47 : 1,4 = 1,0

7) 1 : 3 = 0,3 8) 0,05 : 0,4 = 0,1 9) 0,2704 : 0,52 = 0,5

d) Dê o quociente exato:

1) 0,2106 : 0,2 = 1,053 2) 0,00255 : 1,5 = 0,0017 3) 0,05 : 25 = 0,002

4) 0,64 : 0,8 = 0,8 5) 6,25 : 5 = 1,25 6) 1 : 50 = 0,02

7) 1,44 : 0,6 = 2,4 8) 0,081 : 0,03 = 2,7 9) 8,568 : 1,02 = 8,4

TRANSFORMAÇÕES DE NUMERAIS

Transformação de fração ordinária em numeral decimal

Divide-se o numeral correspondente ao numerador pelo numeral correspondente ao denominador.

Veja:

$\frac{3}{4} = ?$

```
30 |4
20  0,75
 0
```

Então: $\frac{3}{4}$ = 0,75

fração ordinária — numeral decimal

Transforme em numeral decimal:

1) $\frac{2}{8}$ = 0,25 2) $\frac{4}{8}$ = 0,5 3) $\frac{1}{5}$ = 0,2 4) $\frac{6}{5}$ = 1,2

5) $\frac{1}{8}$ = 0,125 6) $\frac{3}{8}$ = 0,375 7) $\frac{2}{25}$ = 0,08 8) $\frac{5}{20}$ = 0,25

9) $\frac{5}{125}$ = 0,04 10) $\frac{10}{8}$ = 1,25 11) $\frac{3}{4}$ = 0,75 12) $\frac{4}{32}$ = 0,125

UM NUMERAL CURIOSO

Consideremos a fração ordinária $\frac{6}{11}$ e vamos transformá-la em numeral decimal.

Observe:

Aos numerais decimais em que há repetição periódica e indefinida de um ou mais algarismos, dá-se o nome de **numerais decimais periódicos** ou **dízimas periódicas.**

Numa dízima periódica, o algarismo ou algarismos que se repetem indefinidamente constituem o **período** dessa dízima.

0,545454 . . .	→ período: 54
Dízima periódica	→ indicação da dízima: $0,\overline{54}$ ou 0,[54]

Agora preste bastante atenção no seguinte fato:

$\frac{14}{9} = ?$

```
14 |9
50  1,555...
50
50
5
```

O período (5) aparece logo após a vírgula. Trata-se, portanto, de **uma dízima periódica simples.**

$\frac{56}{45} = ?$

```
56 |45
110  1,2444 . . .
200
200
200
20
```

O período (4) não aparece logo após a vírgula. Trata-se, portanto, de **uma dízima periódica composta.**

Transforme as frações ordinárias em dízimas, indicando o período, classificando-as em simples ou compostas e dando-lhes a indicação:

1) $\frac{2}{3}$ = 0,666...
período: 6
dízima periódica simples
indicação: $0,\overline{6}$ ou 0,[6]

2) $\frac{4}{9}$ = 0,444...
período: 4
dízima periódica simples
indicação: $0,\overline{4}$ ou 0,[4]

3) $\frac{29}{90}$ = 0,3222...
período: 2
dízima periódica composta
indicação: $0,3\overline{2}$ ou 0,3[2]

4) $\frac{19}{15}$ = 1,2666...
período: 6
dízima periódica composta
indicação: $1,2\overline{6}$ ou 1,2[6]

5) $\frac{116}{45}$ = 2,5777...

período: 7

dízima periódica composta

indicação: $2,5\overline{7}$ ou 2,5[7]

6) $\frac{12}{33}$ = 0,363636...

período: 36

dízima periódica simples

indicação: $0,\overline{36}$ ou 0,[36]

7) $\frac{5}{198}$ = 0,0252525

período: 25

dízima periódica composta

indicação: $0,0\overline{25}$ ou 0,0[25]

8) $\frac{221}{198}$ = 1,11616...

período: 16

dízima periódica composta

indicação: $1,1\overline{16}$ ou 1,1[16]

Transformação de numeral decimal em fração ordinária

> Transforma-se o numeral decimal em fração decimal e, em seguida, faz-se a simplificação.

Exemplo:

$$0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

0,6 — numeral decimal; $\frac{6}{10}$ — fração decimal; $\frac{3}{5}$ — fração ordinária

Transforme os numerais decimais em fração decimal e em fração ordinária:

1) $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

2) $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

3) $1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

4) $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

5) $2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

6) $0,15 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

7) $0,06 = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$

8) $1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$

9) $0,002 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$

10) $0,045 = \frac{45}{1000} = \frac{9}{200}$

TRANSFORMAÇÕES ESPECIAIS

Quando o numeral decimal não é exato (dízima periódica), a transformação em fração ordinária se faz da seguinte maneira:

- **Transformação de dízima periódica simples em fração ordinária**

Observe os exemplos:

1) $0,555\ldots = 0,\overline{5} = \frac{5}{9}$

1 algarismo — 1 nove

2) $1,222\ldots = 1,\overline{2} = 1\frac{2}{9} = \frac{9 \times 1 + 2}{9} = \frac{11}{9}$

1 algarismo — 1 nove

Transforme em fração ordinária:

1) $0,\bar{4} = \frac{4}{9}$

2) $0,\bar{7} = \frac{7}{9}$

3) $0,\overline{21} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$

4) $1,\bar{3} = 1\frac{3}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

5) $1,\bar{6} = 1\frac{6}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

6) $1,\bar{2} = 1\frac{2}{9} = \frac{11}{9}$

7) $0,\overline{15} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$

8) $0,\overline{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

9) $2,\bar{1} = 2\frac{1}{9} = \frac{19}{9}$

10) $2,\overline{05} = 2\frac{5}{99} = \frac{203}{99}$

11) $1,\overline{18} = 1\frac{18}{99} = 1\frac{2}{11} = \frac{13}{11}$

12) $3,\bar{8} = 3\frac{8}{9} = \frac{35}{9}$

13) $5,\bar{5} = 5\frac{5}{9} = \frac{50}{9}$

14) $0,\overline{45} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

15) $0,\overline{18} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$

16) $3,\bar{4} = 3\frac{4}{9} = \frac{31}{9}$

- **Transformação de dízima periódica composta em fração ordinária**

Veja os exemplos:

1) $0,5333\ldots = 0,5\bar{3} = \frac{53-5}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$

2) $1,51212\ldots = 1,5\overline{12} = 1\,\frac{512-5}{990} = 1\,\frac{507}{990} = \frac{1497}{990} = \frac{499}{330}$

Transforme em fração ordinária:

1) $0,2\bar{5} = \frac{25-2}{90} = \frac{23}{90}$

2) $0,4\bar{2} = \frac{42-4}{90} = \frac{38}{90} = \frac{19}{45}$

3) $0,1\bar{4} = \frac{14-1}{90} = \frac{13}{90}$

4) $0,6\bar{7} = \frac{67-6}{90} = \frac{61}{90}$

5) $0,3\bar{8} = \frac{38-3}{90} = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}$

6) $0,7\bar{3} = \frac{73-7}{90} = \frac{66}{90} = \frac{11}{15}$

7) $1,1\bar{4} = 1\frac{14-1}{90} = 1\frac{13}{90} = \frac{103}{90}$

8) $1,0\bar{2} = 1\frac{2}{90} = 1\frac{1}{45} = \frac{46}{45}$

9) $2,2\bar{1} = 2\frac{21-2}{90} = 2\frac{19}{90} = \frac{199}{90}$

10) $3,1\bar{8} = 3\frac{18-1}{90} = 3\frac{17}{90} = \frac{287}{90}$

11) $2,5\bar{7} = 2\frac{57-5}{90} = 2\frac{52}{90} = 2\frac{26}{45} = \frac{116}{45}$

12) $1,7\bar{1} = 1\frac{71-7}{90} = 1\frac{64}{90} = 1\frac{32}{45} = \frac{77}{45}$

A fração ordinária que se obtém da transformação de uma dízima periódica recebe o nome de **fração geratriz** ou simplesmente **geratriz**.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Transforme em numeral decimal as frações ordinárias:

1) $\frac{27}{75} = 0,36$

2) $\frac{1}{50} = 0,02$

3) $\frac{8}{3} = 2,666\ldots\ (2,\bar{6})$

4) $\frac{5}{11} = 0,454545\ldots\ (0,\overline{45})$

5) $\frac{1}{20} = 0,05$

6) $\frac{1}{9} = 0,111\ldots\ (0,\bar{1})$

b) Transforme em frações os numerais decimais:

1) $0,3 = \frac{3}{10}$

2) $0,\overline{3} = \frac{3}{9}$

3) $1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

4) $1,\overline{5} = 1\frac{5}{9} = \frac{14}{9}$

5) $1,12 = \frac{112}{100} = \frac{28}{25}$

6) $1,\overline{12} = 1\frac{12}{99} = 1\frac{4}{33} = \frac{37}{33}$

7) $1,1\overline{2} = 1\frac{11}{90} = \frac{101}{90}$

8) $0,52 = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$

9) $0,\overline{52} = \frac{52}{99}$

c) Efetue as operações indicadas:

1) $0,2 \times 0,2 = 0,04$

2) $0,2 \times 0,\overline{2} = \frac{2}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45} = 0,0\overline{4}$

3) $0,\overline{2} \times 0,\overline{2} = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$

4) $0,4 + 0,4 = 0,8$

5) $0,4 + 0,\overline{4} = \frac{4}{10} + \frac{4}{9} = \frac{36+40}{90} = \frac{76}{90} = \frac{38}{45} = 0,8\overline{4}$

6) $0,\overline{4} + 0,\overline{4} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} = 0,\overline{8}$

7) $1,5 : 0,5 = 3$

8) $1,5 : 0,\overline{5} = \frac{15}{10} : \frac{5}{9} = \frac{15}{10} \times \frac{9}{5} = \frac{27}{10} = 2,7$

9) $1,\overline{5} : 0,5 = \frac{14}{9} : \frac{5}{10} = \frac{14}{9} \times \frac{10}{5} = \frac{140}{45} = \frac{28}{9} = 3,\overline{1}$

10) $1,\overline{5} : 0,\overline{5} = \frac{14}{9} : \frac{5}{9} = \frac{14}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{14}{5} = 2,8$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Como se lê?

1) 0,25: vinte e cinco centésimos

2) 1,09: um inteiro e nove centésimos

3) 0,103: cento e três milésimos

4) 2,007: dois inteiros e sete milésimos

5) 0,043: quarenta e três milésimos

b) Faça a conversão em numeral decimal (exato ou periódico):

1) $\frac{75}{10} = 7,5$

2) $\frac{23}{100} = 0,23$

3) $\frac{8}{9} = 0,888\ldots (0,\overline{8})$

4) $\frac{131}{1\,000} = 0,131$

5) $\frac{7}{33} = 0,\overline{21}$

6) $\frac{19}{90} = 0,2\overline{1}$

7) $\frac{17}{9} = 1,\overline{8}$

8) $\frac{16}{5} = 3,2$

9) $\frac{6}{75} = 0,08$

c) Faça a conversão dos numerais decimais em fração ordinária:

1) $0,008 = \frac{8}{1\,000} = \frac{1}{125}$

2) $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

3) $0,\bar{8} = \frac{8}{9}$

4) $1,6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

5) $1,\bar{6} = 1\frac{6}{9} = \frac{5}{3}$

6) $2,15 = \frac{215}{100} = \frac{43}{20}$

7) $2,\overline{15} = 2\frac{15}{99} = \frac{71}{33}$

8) $2,1\bar{5} = 2\frac{14}{90} = \frac{97}{45}$

9) $8,2 = \frac{82}{10} = \frac{41}{5}$

10) $8,\bar{2} = 8\frac{2}{9} = \frac{74}{9}$

d) Efetue as operações:

1) $1,05 \times 10 =$ 10,5

2) $5,2 : 100 =$ 0,052

3) $0,0002 \times 1000 =$ 0,2

4) $2,1 : 1\,000 =$ 0,0021

5) $4,3 + 2,3 =$ 6,6

6) $0,021 + 1,1 =$ 1,121

7) $1,3 - 1,216 =$ 0,084

8) $4,1 \times 0,015 =$ 0,0615

9) $4,2 : 0,014 =$ 300

10) $0,021 : 0,7 =$ 0,03

11) $15 : 0,15 =$ 100

12) $0,054 : 18 =$ 0,003

13) $(0,1)^3 =$ 0,001

14) $(0,5)^3 : 12,5 =$ 0,01

15) $(0,7)^2 \times 0,05 =$ 9,8

16) $(0,4)^4 : 0,064 =$ 0,4

17) $16 : (0,2)^4 =$ 10 000

18) $(0,2)^3 : 0,2 =$ 0,04

e) Dê a indicação das dízimas e encontre as frações geratrizes:

1) 1,222 . . .
indicação: $1,\bar{2}$
geratriz: $\frac{11}{9}$

2) 0,4111 . . .
indicação: $0,4\bar{1}$
geratriz: $\frac{37}{90}$

3) 0,2777 . . .
indicação: $0,2\bar{7}$
geratriz: $\frac{5}{18}$

4) 1,3888 . . .
indicação: $1,3\bar{8}$
geratriz: $\frac{25}{18}$

POTENCIAÇÃO

NOÇÃO DE POTÊNCIA

Provavelmente você já aprendeu que uma multiplicação de fatores iguais pode ser representada de forma abreviada, da seguinte maneira:

$5 \times 5 \times 5 = \boxed{5^3}$ — fator que se repete: base = 5; número de vezes que o fator se repete: expoente = 3

$8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = \boxed{8^5}$ — fator que se repete: base = 8; número de vezes que o fator se repete: expoente = 5

Agora complete:

1) $2 \times 2 \times 2 = 2^{3}$
2) $5 \times 5 = 5^{2}$
3) $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$
4) $10 \times 10 = 10^2$
5) $6 \times 6 \times 6 = 6^3$
6) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$
7) $8 \times 8 \times 8 = 8^{3}$
8) $11 \times 11 \times 11 = 11^3$
9) $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times = 1^4$
10) $12 \times 12 \times 12 = 12^{3}$
11) $15 \times 15 \times 15 \times 15 = 15^4$
12) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

O produto de fatores iguais recebe o nome de **potência**.

COMO SE DETERMINA A POTÊNCIA?

Para se determinar a potência de um número basta multiplicá-lo por ele mesmo tantas vezes quantas forem indicadas pelo expoente.

Tal operação recebe o nome de **potenciação**.

Veja: $5^3 = \underbrace{5 \times 5}_{25} \times 5 \Longrightarrow 5^3 = 125$

25 → 125

$2^5 = \underbrace{2 \times 2}_{4} \times 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow 2^5 = 32$

4 → 8 → 16 → 32

EXERCÍCIOS

a) Determine a potência:

1) $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$
2) $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
3) $7^2 = 7 \times 7 = 49$
4) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
5) $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$
6) $15^2 = 15 \times 15 = 225$
7) $12^2 = 12 \times 12 = 144$
8) $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$
9) $20^2 = 20 \times 20 = 400$
10) $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$
11) $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$
12) $6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1\,296$

b) Determine a potência das frações de acordo com o exemplo:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

4) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

7) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

8) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

9) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{125}$

10) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete, indicando a base e o expoente:

1) $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$
base = 2
expoente = 4

2) $8 \times 8 = 8^2$
base = 8
expoente = 2

3) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$
base = 9
expoente = 5

4) $3 \times 3 \times 3 = 3^3$
base = 3
expoente = 3

5) $0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0^4$
base = 0
expoente = 4

6) $\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
base = $\frac{1}{2}$
expoente = 3

7) $\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
base = $\frac{2}{3}$
expoente = 2

8) $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$
base = 10
expoente = 4

9) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$
base = 4
expoente = 6

b) Complete as sentenças adequadamente:

1) $(0,2)^3 = 0,2 \times 0,2 \times 0,2$

2) $(0,5)^2 = 0,5 \times 0,5$

3) $(0,1)^4 = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1$

4) $(0,03)^3 = 0,03 \times 0,03 \times 0,03$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

6) $\left(\frac{2}{7}\right)^4 = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7}$

7) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$

8) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

9) $(0,25)^3 = 0,25 \times 0,25 \times 0,25$

10) $\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8}$

11) $\left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$

12) $(2,6)^4 = 2,6 \times 2,6 \times 2,6 \times 2,6$

13) $(1,2)^3 = 1,2 \times 1,2 \times 1,2$

14) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7}$

c) Determine as potências:

1) $2^3 = 8$ 2) $2^6 =$ 64 3) $3^5 =$ 243

4) $3^4 =$ 81 5) $10^3 =$ 1000 6) $(0,5)^3 =$ 0,125

7) $(0,1)^4 =$ 0,0001 8) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 =$ $\frac{1}{64}$ 9) $(1,2)^2 =$ 1,44

10) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 =$ $\frac{1}{10\,000}$ 11) $(0,3)^3 =$ 0,027 12) $(0,2)^5 =$ 0,00032

d) Resolva:

1) Sabendo que a base é 2 e o expoente é 7, determine a potência.

$2^7 = ?$ $2^7 = 128$

2) Determine o expoente, sabendo que a base é 3 e a potência é 81.

$3^? = 81$ $3^4 = 81$

3) Descubra qual é a potência, sabendo que a base é $\frac{2}{3}$ e o expoente é 3.

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = ?$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

4) Determine o expoente, sendo que a potência é $\frac{27}{64}$ e a base é $\frac{3}{4}$.

$\left(\frac{3}{4}\right)^? = \frac{27}{64}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

OPERAÇÕES COM POTÊNCIAS INDICADAS

- Adição e subtração

$$2^3 + 3^2 = 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 = 8 + 9 = 17$$

$$7^2 - 3^2 = 7 \times 7 - 3 \times 3 = 49 - 9 = 40$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{9}{72} + \frac{8}{72} = \frac{17}{72}$$

m.m.c. (8, 9) = 72

Então, para efetuar a adição ou a subtração de potências indicadas, deve-se primeiramente calcular o valor de cada uma.

Determine:

1) $2^4 + 3^3 =$ 16 + 27 = 43 2) $5^3 - 5^2 =$ 125 − 25 = 100

3) $2^5 + 2^3 - 2^4 =$ 32 + 8 − 16 = 24 4) $10^3 - 9^2 - 2^6 =$ 1000 − 81 − 64 = 855

5) $(0,1)^2 + (0,2)^3 =$ 0,01 + 0,008 = 0,018 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 =$ $\frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

7) $2^6 - 1^7 =$ 64 − 1 = 63 8) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$ $\frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

9) $(0,2)^3 + (0,2)^2 =$ 0,008 + 0,04 = 0,048 10) $1^4 + 1^2 =$ 1 + 1 = 2

11) $1^5 - 1^3 =$ $1 - 1 = 0$

12) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} =$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

13) $\frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$ $\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$

14) $3^2 + 2^2 - 1^8 =$ $9 + 4 - 1 = 12$

15) $10^2 - 5^2 =$ $100 - 25 = 75$

16) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$ $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

- Multiplicação e divisão

$$\boxed{2^4} \times \boxed{3^2} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 16 \times 9 = 144$$

$$\boxed{12^2} : \boxed{2^3} = (12 \times 12) : (2 \times 2 \times 2) = 144 : 8 = 18$$

Então, para efetuar a multiplicação ou a divisão de potências indicadas, deve-se primeiramente calcular o valor de cada uma.

Determine:

1) $3^2 \times 2^3 =$ $9 \times 8 = 72$

2) $7^2 \times 2^4 =$ $49 \times 16 = 784$

3) $2^5 \times 3^2 =$ $32 \times 9 = 288$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$ $\frac{1}{8} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{72}$

5) $2^3 \times 5^2 =$ $8 \times 25 = 200$

6) $(0{,}2)^2 \times (0{,}5)^3 =$ $0{,}04 \times 0{,}125 = 0{,}005$

7) $8^2 : 2^3 =$ $64 : 8 = 8$

8) $6^4 : 4^2 =$ $1296 : 16 = 81$

9) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$ $\frac{1}{16} : \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

10) $(0{,}2)^3 : (0{,}5)^2 =$ $0{,}008 : 0{,}25 = 0{,}032$

11) $2^5 : 4^2 =$ $32 : 16 = 2$

12) $6^2 : 2^3 =$ $36 : 8 = 4{,}5$

Um caso especial: multiplicação e divisão de potências indicadas de bases iguais.

Veja:

$$\boxed{2^3} \times \boxed{2^4} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128 \Longrightarrow 2^{\boxed{3}} \times 2^{\boxed{4}} = 2^{\boxed{7}} \quad (3 + 4 = 7)$$

$$\boxed{3^4} : \boxed{3^2} = (3 \times 3 \times 3 \times 3) : (3 \times 3) = 81 : 9 = 9 = 3^2 \Longrightarrow 3^{\boxed{4}} : 3^{\boxed{2}} = 3^{\boxed{2}} \quad (4 - 2 = 2)$$

Em vista disso, podemos concluir que:

- Para efetuar a multiplicação de potências indicadas de bases iguais, deve-se manter a base e adicionar os expoentes:

$$\boxed{x^a \cdot x^b = x^{a+b}}$$

- Para efetuar a divisão entre potências indicadas de bases iguais, deve-se manter a base e subtrair os expoentes:

$$\boxed{x^a : x^b = x^{a-b}}$$

Agora efetue:

1) $2^3 \times 2^5 = 2^8$

2) $3^2 \times 3^3 = 3^5$

3) $4^5 \times 4^2 = 4^7$

4) $5^3 \times 5^2 \times 5^4 = 5^9$

5) $7^2 \times 7^5 = 7^7$

6) $3^4 \times 3^2 \times 3 = 3^7$

7) $2^8 \times 2^2 \times 2^3 = 2^{13}$

8) $4^4 \times 4^2 \times 4^5 = 4^{11}$

9) $10^3 \times 10^2 = 10^5$

10) $15^4 \times 15^3 = 15^7$

11) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

12) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

13) $\left(\frac{1}{5}\right)^5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$

14) $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{14}$

15) $\left(\frac{3}{4}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^9$

16) $(0,2)^3 \times (0,2)^2 = (0,2)^5$

17) $(0,1)^4 \times (0,1)^2 = (0,1)^6$

18) $(0,5)^2 \times (0,5)^3 \times (0,5)^5 = (0,5)^{10}$

19) $(0,1)^3 \times (0,1)^3 = (0,1)^6$

20) $(1,5)^7 \times (1,5)^2 = (1,5)^9$

21) $2^5 : 2^2 = 2^3$

22) $3^8 : 3^5 = 3^3$

23) $8^{12} : 8^7 = 8^5$

24) $10^6 : 10^2 = 10^4$

25) $30^{15} : 30^7 = 30^8$

26) $\left(\frac{1}{2}\right)^9 : \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

27) $\left(\frac{5}{7}\right)^{13} : \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \left(\frac{5}{7}\right)^{10}$

28) $\left(\frac{3}{5}\right)^9 : \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \left(\frac{3}{5}\right)^8$

29) $(0,2)^8 : (0,2)^7 = (0,2)^1$

30) $(0,5)^{11} : (0,5)^4 = (0,5)^7$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Efetue as adições e subtrações:

1) $2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

2) $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$

3) $4^3 - 3^3 = 64 - 27 = 37$

4) $10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

5) $7^2 - 2^2 + 5^2 = 49 - 4 + 25 = 70$

6) $3^4 + 2^5 - 10^2 = 81 + 32 - 100 = 13$

7) $12^2 - 3^3 + 2^5 = 144 - 27 + 32 = 149$

8) $20^2 - 5^3 - 1^6 = 400 - 125 - 1 = 274$

9) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{1}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

10) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{1}{8} = \frac{23}{72}$

11) $(0,2)^2 + (0,3)^2 = 0,04 + 0,09 = 0,13$

12) $(0,4)^2 - (0,5)^3 = 0,16 - 0,125 = 0,035$

b) Efetue as multiplicações e divisões:

1) $13^2 \times 2^3 = 169 \times 8 = 1\,352$

2) $\left(\frac{1}{7}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{49} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{392}$

3) $(0,8)^2 \times (0,1)^3 = 0,64 \times 0,001 = 0,00064$

4) $(0,2)^4 \times (0,5)^2 = 0,0016 \times 0,25 = 0,0004$

5) $14^2 : 7^2 = 196 : 49 = 4$

6) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{16} : \frac{8}{27} = \frac{1}{16} \times \frac{27}{8} = \frac{27}{128}$

7) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{4}{25} : \frac{1}{1000} = \frac{4}{25} \times \frac{1000}{1} = 160$

8) $(0,5)^3 : (0,2)^2 = 0,125 : 0,04 = 3,125$

c) Complete adequadamente:

1) $3^5 \times 3^3 = 3^8$

2) $7^2 \times 7^4 = 7^6$

3) $5^5 \times 5^5 = 5^{10}$

4) $2^6 \times 2^4 = 2^{10}$

5) $10^2 \times 10^2 = 10^4$

6) $9^2 \times 9^5 = 9^7$

7) $6^4 \times 6^2 = 6^6$

8) $4^3 \times 4^7 = 4^{10}$

9) $13^5 \times 13^2 \times 13 = 13^8$

10) $2^8 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{15}$

11) $8^5 \times 8^4 \times 8^2 = 8^{11}$

12) $3^2 \times 3^{10} = 3^{12}$

13) $(0,5)^4 \times (0,5)^3 = (0,5)^7$

14) $(0,2)^6 \times (0,2)^4 = (0,2)^{10}$

15) $(0,3)^4 \times (0,3)^8 \times (0,3)^2 = (0,3)^{14}$

16) $(0,1)^7 \times (0,1)^4 = (0,1)^{11}$

17) $(0,6)^2 \times (0,6)^2 = (0,6)^4$

18) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^7$

19) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{14}$

20) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{11}$

21) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^{10} = \left(\frac{2}{7}\right)^{13}$

22) $\left(\frac{1}{2}\right)^8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$

d) Determine o quociente na forma de potência indicada:

1) $2^9 : 2^7 = 2^2$

2) $5^4 : 5^2 = 5^2$

3) $3^6 : 3^3 = 3^3$

4) $7^5 : 7^3 = 7^2$

5) $11^{10} : 11^6 = 11^4$

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

7) $\left(\frac{1}{5}\right)^{12} : \left(\frac{1}{5}\right)^7 = \left(\frac{1}{5}\right)^5$

8) $\left(\frac{2}{3}\right)^{15} : \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

9) $(0,2)^8 : (0,2)^5 = (0,2)^3$

10) $(0,3)^{12} : (0,3)^3 = (0,3)^9$

11) $13^6 : 13^4 = 13^2$

12) $18^9 : 18^4 = 18^5$

13) $\left(\frac{2}{7}\right)^{20} : \left(\frac{2}{7}\right)^{13} = \left(\frac{2}{7}\right)^7$

14) $\left(\frac{3}{2}\right)^{18} : \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

15) $\left(\frac{1}{2}\right)^{17} : \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$

16) $(0,5)^{16} : (0,5)^5 = (0,5)^{11}$

17) $(1,2)^5 : (1,2)^2 = (1,2)^3$

18) $(0,1)^{16} : (0,1)^{12} = (0,1)^4$

19) $(0,7)^{15} : (0,7)^{14} = (0,7)^1$

20) $(0,05)^8 : (0,05)^1 = (0,05)^7$

PROPRIEDADES ESPECIAIS

- Base = zero
  Expoente = n.º natural diferente de zero
  Potência = zero

Veja:

$0^2 = 0 \times 0 = 0$

$0^4 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$

- Base = 1
  Expoente = qualquer
  Potência = 1

Veja:

$1^2 = 1 \times 1 = 1$

$1^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

- Base = qualquer
  Expoente = 1
  Potência = base

Veja:

$3^1 = 3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

- Base = 10
  Expoente = número natural
  Potência = algarismo 1 seguido de tantos zeros quantos indicar o expoente

Veja:

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$

$10^0 = 1$

- Base = qualquer
  Expoente = zero
  Potência = 1

Veja:

$5^0 = 1$ $\quad (0,5)^0 = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ $\quad 0^0 = 1$

Com base nessas propriedades, determine a potência:

1) $1^6 = 1$
2) $8^1 = 8$
3) $0^6 = 0$
4) $1^8 = 1$
5) $10^3 = 1000$
6) $0^{12} = 0$
7) $9^0 = 1$
8) $15^0 = 1$
9) $10^6 = 1\,000\,000$
10) $0^7 = 0$
11) $2^0 = 1$
12) $10^8 = 100\,000\,000$
13) $1^{10} = 1$
14) $10^1 = 10$
15) $0^{10} = 0$
16) $5^1 = 5$
17) $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$
18) $(0,01)^0 = 1$
19) $(1,5)^0 = 1$
20) $10^7 = 10\,000\,000$
21) $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$
22) $\left(\frac{1}{10}\right)^0 = 1$
23) $1^0 = 1$
24) $\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$

PROPRIEDADES AUXILIARES

- Potência de potência

Observe a indicação: $(3^2)^3$. Como interpretá-la?

Basta utilizar a definição.

Assim:

$$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^6 \Longrightarrow (3^{\boxed{2}})^{\boxed{3}} = 3^{\boxed{6}} \qquad 2 \times 3 = 6$$

Então, para elevar uma potência a outra potência, deve-se manter a base e multiplicar os expoentes.

Complete conforme o modelo:

1) $(4^3)^4 = 4^{12}$
2) $(5^3)^2 = 5^6$
3) $(2^3)^4 = 2^{12}$
4) $(1^2)^5 = 1^{10}$
5) $(10^2)^4 = 10^8$
6) $(2^5)^0 = 2^0$
7) $(3^6)^1 = 3^6$
8) $(10^3)^5 = 10^{15}$
9) $(9^2)^2 = 9^4$
10) $(6^4)^7 = 6^{28}$
11) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^6$
12) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^5\right]^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^{10}$
13) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{18}$
14) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^{14}$
15) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^9$
16) $[(0,1)^2]^5 = (0,1)^{10}$
17) $[(0,5)^3]^2 = (0,5)^6$
18) $[(0,3)^4]^2 = (0,3)^8$
19) $[(0,7)^8]^0 = (0,7)^0$
20) $[(0,9)^0]^5 = (0,9)^0$

- Potência de um produto indicado

Como interpretar a indicação: $(2 \times 3)^2$?

Veja:

$$(2 \times 3)^2 = \underbrace{2 \times 3} \times \underbrace{2 \times 3} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2 \Longrightarrow (2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2$$

Então, para elevar um produto indicado a um expoente, deve-se elevar cada fator do produto indicado a esse expoente.

Essa é a propriedade distributiva da potenciação em relação à multiplicação.

Complete:

1) $(5 \times 2)^4 = 5^4 \times 2^4$
2) $(7 \times 3)^2 = 7^2 \times 3^2$
3) $(11 \times 2)^3 = 11^3 \times 2^3$
4) $(2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$
5) $\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2$
6) $\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$
7) $(0{,}1 \times 0{,}3)^3 = (0{,}1)^3 \times (0{,}3)^3$
8) $(0{,}2 \times 0{,}5)^2 = (0{,}2)^2 \times (0{,}5)^2$
9) $(5 \times 3 \times 7)^6 = 5^6 \times 3^6 \times 7^6$

- Potência de um quociente indicado

Observe:

$$(10 : 5)^2 = (10 : 5) \times (10 : 5) = (10 \times 10) : (5 \times 5) = 10^2 : 5^2$$

Então, para elevar um quociente indicado a um expoente, eleva-se cada termo da divisão a esse expoente.

Essa é a propriedade distributiva da potenciação em relação à divisão.

Aplique a propriedade distributiva:

1) $(8 : 2)^5 = 8^5 : 2^5$
2) $(27 : 3)^2 = 27^2 : 3^2$
3) $(15 : 5)^3 = 15^3 : 5^3$
4) $(30 : 6)^2 = 30^2 : 6^2$
5) $(10 : 2)^6 = 10^6 : 2^6$
6) $(14 : 7)^4 = 14^4 : 7^4$
7) $(3 : 2)^8 = 3^8 : 2^8$
8) $(0{,}2 : 0{,}3)^3 = (0{,}2)^3 : (0{,}3)^3$
9) $\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2$
10) $\left(\frac{2}{3} : \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^3$

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Coloque potências indicadas nos □, de modo que, efetuando as operações, o resultado seja a potência indicada do □ central:

(potência de um produto indicado)
$(2 \times 1)^4$

(mesma base) 2^6 : 2^2

5^2 − 3^2

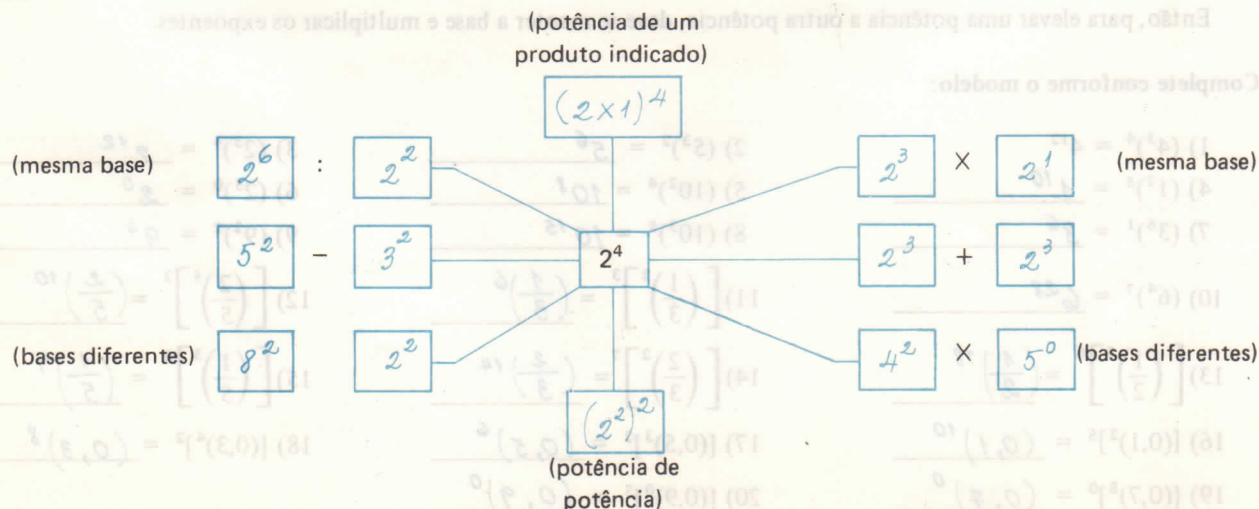
(bases diferentes) 8^2 : 2^2

Central: 2^4

2^3 × 2^1 (mesma base)

2^3 + 2^3

4^2 × 5^0 (bases diferentes)

$(2^2)^2$
(potência de potência)

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete de modo que a sentença se torne verdadeira:

1) $3^{2} = 9$ 2) $10^{6} = 1\,000\,000$ 3) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$ 4) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2} = \frac{1}{64}$

5) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0} = 1$ 6) $0^3 = 0$ 7) $1^8 = 1$ 8) $10^{0} = 1$

9) $\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{81}$ 10) $(0,09)^{0} = 1$ 11) $13^0 = 1$ 12) $0^{15} = 0$

13) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ 14) $\left(\frac{3}{11}\right)^{0} = 1$ 15) $10^{2} = 100$ 16) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3} = \frac{1}{27}$

17) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1} = \frac{2}{5}$ 18) $\left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{9}{36}$

b) Dê o resultado na forma de potência indicada, aplicando uma das propriedades estudadas:

1) $(2^5)^3 = 2^{15}$ 2) $(3^2)^8 = 3^{16}$ 3) $(5^0)^3 = 5^0$

4) $(7^4)^0 = 7^0$ 5) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ 6) $(5 \times 2)^8 = 5^8 \times 2^8$

7) $(2 \times 9)^3 = 2^3 \times 9^3$ 8) $(10 : 2)^6 = 10^6 : 2^6$ 9) $(121 : 11)^2 = 121^2 : 11^2$

10) $(18 : 6)^7 = 18^7 : 6^7$ 11) $\left(8 \times \frac{1}{2}\right)^3 = 8^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ 12) $\left(\frac{2}{7} \times \frac{5}{9}\right)^4 = \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{5}{9}\right)^4$

13) $\left(\frac{8}{9} : \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2$ 14) $(0,1 \times 0,3)^8 = (0,1)^8 \times (0,3)^8$ 15) $(0,9 : 0,3)^2 = (0,9)^2 : (0,3)^2$

16) $\left(\frac{1}{2} \times 5\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 5^3$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Determine as potências:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}$ 3) $\left(\frac{3}{10}\right)^4 = \frac{81}{10\,000}$ 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

5) $\left(3\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1\,000}{27}$ 6) $\left(4\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ 7) $\left(5\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{11}{2}$ 8) $1^5 = 1$

9) $(1,1)^2 = 1,21$ 10) $(0,04)^3 = 0,000064$ 11) $(2,5)^2 = 6,25$ 12) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

b) Associe as colunas I e II:

coluna I	coluna II	coluna I	coluna II
1) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$	(3) 1	4) $\left(\frac{9}{4}\right)^1$	(2) $\frac{5}{8}$
2) $\left(\frac{5}{8}\right)^1$	(4) $\frac{9}{4}$	5) $\left(\frac{1}{20}\right)^2$	(1) $\frac{27}{125}$
3) $\left(\frac{3}{7}\right)^0$	(5) $\frac{1}{400}$		

c) Transforme as multiplicações em potências indicadas:

1) $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$ 2) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ 3) $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^4$

4) $\frac{5}{13} \times \frac{5}{13} \times \frac{5}{13} = \left(\frac{5}{13}\right)^3$ 5) $0,01 \times 0,01 = (0,01)^2$ 6) $0,9 \times 0,9 \times 0,9 = (0,9)^3$

7) $0,15 \times 0,15 \times 0,15 \times 0,15 = (0,15)^4$ 8) $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1^6$ 9) $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

d) Dê o resultado em forma de potência indicada:

1) $5^3 \times 5^8 = 5^{11}$ 2) $7^2 \times 7^3 \times 7^4 = 7^9$ 3) $25^9 : 25^4 = 25^5$

4) $2 \times 2^5 : 2^2 = 2^4$ 5) $(3^4)^6 = 3^{24}$ 6) $(2^5)^8 = 2^{40}$

7) $(2^3)^{10} = 2^{30}$ 8) $(3^5)^2 = 3^{10}$ 9) $(2^3 \times 2^9)^2 = 2^{24}$

10) $(4^5 \times 4^7)^3 = 4^{36}$

e) Desenvolva aplicando a propriedade distributiva:

1) $(2^3 \times 3^2 \times 5)^3 = 2^9 \times 3^6 \times 5^3$ 2) $(2 \times 7^2)^5 = 2^5 \times 7^{10}$ 3) $(8^5 : 3^4)^4 = 8^{20} : 3^{16}$

4) $(15^7 : 3^2)^3 = 15^{21} : 3^6$ 5) $(3^4 \times 5^6 : 2^3)^6 = 3^{24} \times 5^{36} : 2^{18}$ 6) $(2^6 : 3^2 \times 4^5)^3 = 2^{18} : 3^6 \times 4^{15}$

f) Efetue as operações:

1) $4^2 \times 3^2 + 1^7 = 145$ 2) $10^2 - 4^3 + 2^5 = 68$ 3) $5^2 : 5 - 4^3 : 4^2 = 1$

4) $2^6 - 8^2 = 0$ 5) $3 \times 5^2 = 75$ 6) $18 : 3^2 = 2$

g) Resolva:

1) Sabendo que a base é 4 e o expoente é 3, determine a potência. (64)

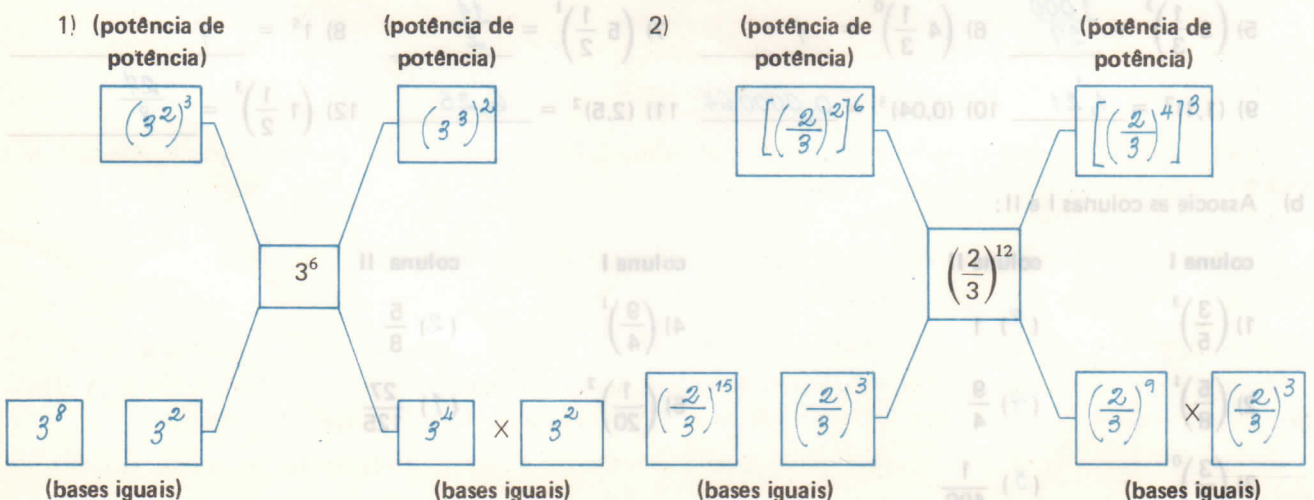
2) Determine a potência, sabendo que a base é $\frac{1}{2}$ e o expoente é 4. $\left(\frac{1}{16}\right)$

3) Descubra qual é o expoente, sabendo que a base é 10 e a potência é 10 000. (4)

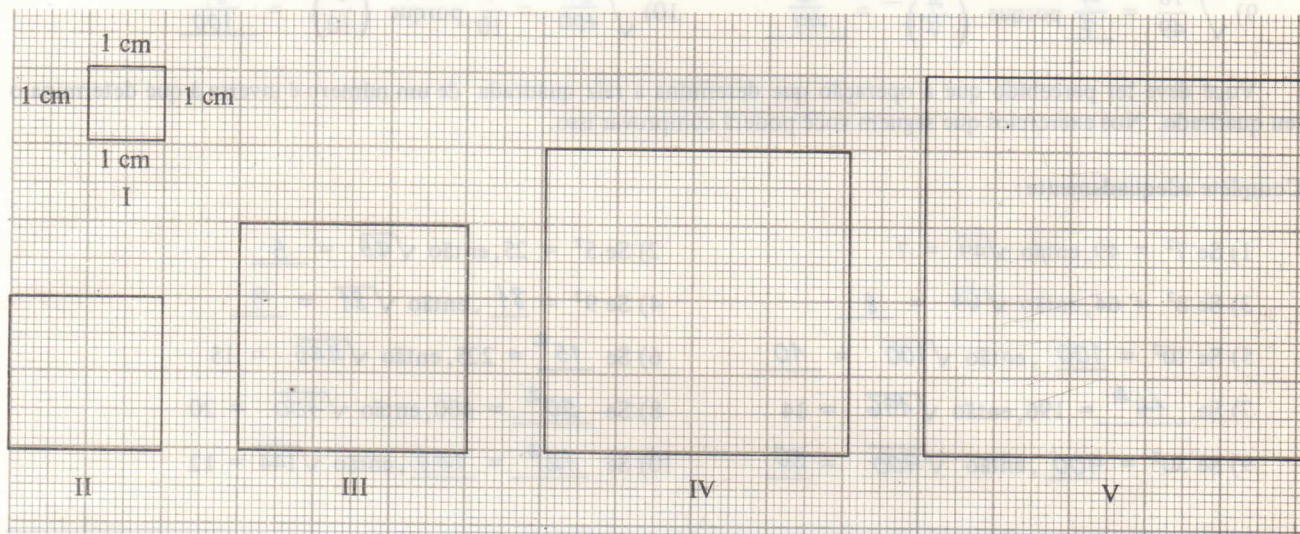
4) Sabendo que o expoente é 20 e a potência é 1, descubra a base. (1)

5) A análise de uma certa quantidade de sangue de um indivíduo revelou a existência de um bilhão de glóbulos vermelhos. Determine para este número um numeral que contenha três algarismos diferentes, sem repetição. (10^9)

h) Escreva potências indicadas nos □, de modo que, de acordo com o que se pede, o resultado seja a potência indicada do □ central:

RADICIAÇÃO

NOÇÃO DE RAIZ QUADRADA

Na 5.ª série você deve ter aprendido a determinar a área de um quadrado conhecendo a medida do comprimento do lado.

Vamos considerar o quadrado I como padrão de medida de área e compará-lo com os demais:

Então temos:

quadrado I: área = 1 cm^2 quadrado II: área = 4 cm^2
quadrado III: área = 9 cm^2 quadrado IV: área = 16 cm^2
quadrado V: área = 25 cm^2

Agora veja:

O que determinou a área de 1 cm^2 foi a multiplicação $1 \times 1 = 1^2$.
O que determinou a área de 4 cm^2 foi a multiplicação $2 \times 2 = 2^2$.
O que determinou a área de 9 cm^2 foi a multiplicação $3 \times 3 = 3^2$.
O que determinou a área de 16 cm^2 foi a multiplicação $4 \times 4 = 4^2$.
O que determinou a área de 25 cm^2 foi a multiplicação $5 \times 5 = 5^2$.

Dizemos então que a medida do comprimento do lado do quadrado é um número que, elevado à segunda potência (ao quadrado), nos dá a medida da área desse quadrado.

Com base na afirmação acima, responda:

Se a área de um quadrado é de 36 cm^2, qual a medida do comprimento do seu lado?

Com certeza você vai responder rapidamente: 6 cm.

Mas, como obteve esse resultado? Que operação você realizou?

Na verdade, você efetuou uma operação inversa à potenciação: **a radiciação.** O número 6, cujo quadrado é 36, chama-se **raiz quadrada** de 36, que é indicada assim: $\sqrt{36} = 6$ (Lê-se: raiz quadrada de 36 é igual a 6.)

Então, raiz quadrada de um número é outro número que, elevado à segunda potência (ao quadrado), reproduz o primeiro.

Agora complete, de acordo com os exemplos:

$\sqrt{64} = 8$ porque $8^2 = 64$ $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$

1) $\sqrt{1} = 1$ porque $1^2 = 1$

2) $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$

3) $\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$

4) $\sqrt{121} = 11$ porque $11^2 = 121$

5) $\sqrt{144} = 12$ porque $12^2 = 144$

6) $\sqrt{196} = 14$ porque $14^2 = 196$

7) $\sqrt{225} = 15$ porque $15^2 = 225$

8) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

9) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7}$ porque $\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$

10) $\sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10}$ porque $\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$

Você deve ter percebido que a operação que determina a raiz quadrada de um número é inversa à que determina o seu quadrado. Nos exercícios que seguem você poderá comprovar isso.

Complete adequadamente:

1) Se $7^2 = 49$, então $\sqrt{49} = 7$

2) Se $5^2 = 25$, então $\sqrt{25} = 5$

3) Se $8^2 = 64$, então $\sqrt{64} = 8$

4) Se $9^2 = 81$, então $\sqrt{81} = 9$

5) Se $10^2 = 100$, então $\sqrt{100} = 10$

6) Se $15^2 = 225$, então $\sqrt{225} = 15$

7) Se $14^2 = 196$, então $\sqrt{196} = 14$

8) Se $20^2 = 400$, então $\sqrt{400} = 20$

9) Se $30^2 = 900$, então $\sqrt{900} = 30$

10) Se $12^2 = 144$, então $\sqrt{144} = 12$

NOÇÃO DE QUADRADO PERFEITO

Quando um número racional possui como raiz quadrada exata um outro número racional ele é chamado de **quadrado perfeito**.

Se você observar, por exemplo, o conjunto dos números naturais de **0** a **121**, verá que entre esses números há apenas alguns quadrados perfeitos.

Vejamos:

$\{0, 1, \ldots 4, \ldots 9, \ldots 16, \ldots 25, \ldots 36, \ldots 49, \ldots 64, \ldots 81, \ldots 100, \ldots 121\}$

$\sqrt{0} = 0 \Longleftrightarrow 0^2 = 0$ $\sqrt{9} = 3 \Longleftrightarrow 3^2 = 9$ $\sqrt{36} = 6 \Longleftrightarrow 6^2 = 36$ $\sqrt{81} = 9 \Longleftrightarrow 9^2 = 81$

$\sqrt{1} = 1 \Longleftrightarrow 1^2 = 1$ $\sqrt{16} = 4 \Longleftrightarrow 4^2 = 16$ $\sqrt{49} = 7 \Longleftrightarrow 7^2 = 49$ $\sqrt{100} = 10 \Longleftrightarrow 10^2 = 100$

$\sqrt{4} = 2 \Longleftrightarrow 2^2 = 4$ $\sqrt{25} = 5 \Longleftrightarrow 5^2 = 25$ $\sqrt{64} = 8 \Longleftrightarrow 8^2 = 64$ $\sqrt{121} = 11 \Longleftrightarrow 11^2 = 121$

Descubra quais números são quadrados perfeitos nos seguintes conjuntos:

1) $A = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}\right\}$

Quadrados perfeitos: $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{4}{25}$

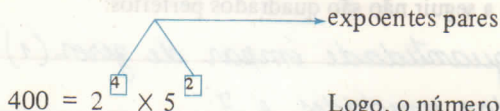
2) $B = \{121, 130, 144, 156\}$

Quadrados perfeitos: 121, 144

3) $C = \{200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900\}$

Quadrados perfeitos: 400, 900

4) $D = \left\{\frac{3}{4}, \frac{16}{49}, \frac{25}{81}, \frac{2}{3}\right\}$

Quadrados perfeitos: $\frac{16}{49}, \frac{25}{81}$

Como se faz para reconhecer um número quadrado perfeito?

- Primeiramente decompõe-se o número em fatores primos.
- A seguir, observam-se os expoentes dos fatores primos. Se esses expoentes forem todos pares, o número em questão é quadrado perfeito.

Veja um exemplo:

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

expoentes pares

$400 = 2^{4} \times 5^{2}$ Logo, o número 400 é quadrado perfeito.

Reconheça, por decomposição, se os números abaixo são quadrados perfeitos:

1) 441

441	3
147	3
49	7
7	7
1	

$441 = 3 \times 3 \times 7 \times 7$

$441 = 3^2 \times 7^2$

Logo: é quadrado perfeito.

2) 225

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$225 = 3^2 \times 5^2$

Logo: é quadrado perfeito.

3) 200

200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$200 = 2^3 \times 5^2$

Logo: não é quadrado perfeito.

4) 144

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$144 = 2^4 \times 3^2$

Logo: é quadrado perfeito.

5) 196

196	2
98	2
49	7
7	7
1	

$196 = 2 \times 2 \times 7 \times 7$

$196 = 2^2 \times 7^2$

Logo: é quadrado perfeito.

6) 216

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$216 = 2^3 \times 3^3$

Logo: não é quadrado perfeito.

7) 324

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$324 = 2^2 \times 3^4$

Logo: é quadrado perfeito.

8) 1 225

1 225	5
245	5
49	7
7	7
1	

$1\,225 = 5 \times 5 \times 7 \times 7$

$1\,225 = 5^2 \times 7^2$

Logo: é quadrado perfeito.

9) 600

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

Logo: não é quadrado perfeito.

Observações:

a) Quando o algarismo das unidades do numeral de um número for 2, 3, 7 ou 8, o número não pode ser quadrado perfeito.

b) Um número cujo numeral termina em quantidade ímpar de zeros não pode ser quadrado perfeito.

Exemplos:

138: não é quadrado perfeito, pois o algarismo das unidades é 8.

2 000: não é quadrado perfeito, pois termina em quantidade ímpar de zeros (3).

Explique, sem decompor, por que os números a seguir não são quadrados perfeitos:

1) 160 Porque termina em quantidade ímpar de zeros (1).

2) 567 Porque o algarismo das unidades é 7.

3) 1 882 Porque o algarismo das unidades é 2.

4) 2 623 Porque o algarismo das unidades é 3.

5) 1 000 Porque termina em quantidade ímpar de zeros (3).

6) 288 Porque o algarismo das unidades é 8.

7) 902 Porque o algarismo das unidades é 2.

8) 503 Porque o algarismo das unidades é 3.

9) 528 Porque o algarismo das unidades é 8.

10) 1 980 Porque termina em quantidade ímpar de zeros (1).

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Um número é representado pelo numeral $2^3 \times 5^2$. Descubra qual o menor número natural com o qual você deve efetuar as operações abaixo indicadas, de modo a obter um quadrado perfeito:

1) Multiplicação: $2^3 \times 5^2 \times \boxed{2} = 2^4 \times 5^2 = 400 \ (20)^2$

2) Divisão: $2^3 \times 5^2 : \boxed{2} = 2^2 \times 5^2 = 100 \ (10)^2$

3) Adição: $2^3 \times 5^2 = 200 + \boxed{25} = 225 \ (15)^2$

4) Subtração: $2^3 \times 5^2 = 200 - \boxed{4} = 196 \ (14)^2$

Qual o quadrado perfeito obtido em cada caso?

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete adequadamente:

1) $\sqrt{324} = 18$ porque $18^2 = 324$

2) $\sqrt{100} = 10$ porque $10^2 = 100$

3) $\sqrt{169} = 13$ porque $13^2 = 169$

4) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ porque $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

5) $\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$ porque $\left(\frac{6}{11}\right)^2 = \frac{36}{121}$

6) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ porque $(0{,}5)^2 = 0{,}25$

7) $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ porque $(0{,}8)^2 = 0{,}64$

8) Se $16^2 = 256$ então $\sqrt{256} = 16$

9) Se 28^2 = 784 então $\sqrt{784}$ = 28

10) Se 40^2 = 1 600 então $\sqrt{1600}$ = 40

11) Se $\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$ então $\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$

12) Se $\left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$ então $\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

b) Verifique, por decomposição, se os números que seguem são quadrados perfeitos:

1) 169

169	13
13	13
1	

$169 = 13 \times 13$

$169 = 13^2$

Logo: é quadrado perfeito

2) 180

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Logo: não é quadrado perfeito

3) 392

392	2
196	2
98	2
49	7
7	7
1	

$392 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7$

$392 = 2^3 \times 7^2$

Logo: não é quadrado perfeito

4) 900

900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$900 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

Logo: é quadrado perfeito

5) 576

576	2
288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$576 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$576 = 2^6 \times 3^2$

Logo: é quadrado perfeito

6) 320

320	2
160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$320 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$320 = 2^6 \times 5$

Logo: não é quadrado perfeito

c) Explique, sem decompor, por que os números abaixo não são quadrados perfeitos:

1) 347 Porque o algarismo das unidades é 7.

2) 123 Porque o algarismo das unidades é 3.

3) 5 000 Porque termina em quantidade ímpar de zeros (3).

4) 250 Porque termina em quantidade ímpar de zeros (1).

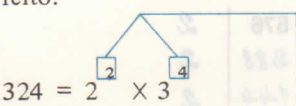
5) 1 222 Porque o algarismo das unidades é 2.

6) 1 978 Porque o algarismo das unidades é 8.

7) 1 310 Porque termina em quantidade ímpar de zeros (1).

8) 6 753 Porque o algarismo das unidades é 3.

COMO ENCONTRAR A RAIZ QUADRADA EXATA DE UM NÚMERO: A EXTRAÇÃO

Observe:

$\sqrt{3^4} = 3^2$ porque $(3^2)^2 = 3^4$

$\sqrt{5^2} = 5^1$ porque $(5^1)^2 = 5^2$

A raiz quadrada de uma potência cujo expoente é par é uma outra potência de mesma base e expoente igual à metade do expoente inicial. Disso se conclui que:

> A raiz quadrada do quadrado de um número é o próprio número.

Utilizando como exemplo o número 324, vamos mostrar como se determina a raiz quadrada de um número. Veja:

1.º passo:	2.º passo:	3.º passo:
Decompor o número em fatores primos. 324 | 2 162 | 2 81 | 3 27 | 3 9 | 3 3 | 3 1 | $324 = 2^2 \times 3^4$	Verificar se o número é quadrado perfeito. $324 = 2^{\boxed{2}} \times 3^{\boxed{4}}$ Todos os expoentes são pares. Logo, é quadrado perfeito.	Se o número for quadrado perfeito, a raiz quadrada será exata e igual ao produto das potências com os expoentes divididos por 2. $324 = 2^2 \times 3^4$ $\sqrt{324} = 2^{2:2} \times 3^{4:2}$ $= 2^1 \times 3^2 = 18$

Encontre a raiz quadrada exata dos números:

1) 625

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$625 = 5^4$

$\sqrt{625} = 5^2 = 25$

2) 576

576	2
288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$576 = 2^6 \times 3^2$

$\sqrt{576} = 2^3 \times 3 = 24$

3) 1 024

1 024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$1\,024 = 2^{10}$

$\sqrt{1\,024} = 2^5 = 32$

4) 256

256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$256 = 2^8$

$\sqrt{256} = 2^4 = 16$

5) 196

196	2
98	2
49	7
7	7
1	

$196 = 2^2 \times 7^2$

$\sqrt{196} = 2 \times 7 = 14$

6) 400

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$400 = 2^4 \times 5^2$

$\sqrt{400} = 2^2 \times 5 = 20$

7) 100

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$100 = 2^2 \times 5^2$

$\sqrt{100} = 2 \times 5 = 10$

8) 900

900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

$\sqrt{900} = 2 \times 3 \times 5 = 30$

9) 1 296

1 296	2
648	2
324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$1\,296 = 2^4 \times 3^4$

$\sqrt{1\,296} = 2^2 \times 3^2 = 36$

10) 1 764

1 764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

$1\,764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$

$\sqrt{1\,764} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

11) 2 916

2 916	2
1 458	2
729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$2\,916 = 2^2 \times 3^6$

$\sqrt{2\,916} = 2 \times 3^3 = 54$

12) 784

784	2
392	2
196	2
98	2
49	7
7	7
1	

$784 = 2^4 \times 7^2$

$\sqrt{784} = 2^2 \times 7 = 28$

RAIZ QUADRADA NÃO-EXATA

Consideremos o seguinte problema:

Qual é a raiz quadrada do número 13?

$\sqrt{13} = ?$

Veja:

$1^2 = 1$, então $\sqrt{1} = 1$

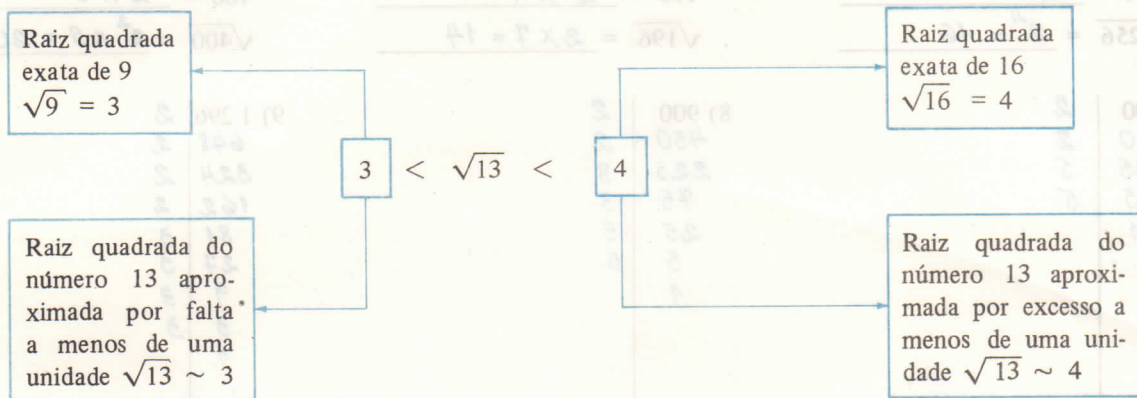
$2^2 = 4$, então $\sqrt{4} = 2$

$3^2 = 9$, então $\sqrt{9} = 3$

$?^2 = 13$, então $\sqrt{13} = ?$

$4^2 = 16$, então $\sqrt{16} = 4$

Note que a raiz quadrada de 13 está compreendida entre os números 3 e 4.

$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$
$3 < \sqrt{13} < 4$

- Raiz quadrada de um número por falta a menos de uma unidade é o maior número cujo quadrado não excede aquele número.
- Raiz quadrada de um número por excesso a menos de uma unidade é o menor número cujo quadrado excede aquele número.

Vejamos mais um caso:

$\sqrt{28} = ?$

$\sqrt{28} \sim 5$ (raiz quadrada por falta a menos de uma unidade, pois $5^2 = 25 < 28$)

$\sqrt{28} \sim 6$ (raiz quadrada por excesso a menos de uma unidade, pois $6^2 = 36 > 28$)

Indique a raiz quadrada por falta e a raiz quadrada por excesso a menos de uma unidade:

1) $\sqrt{19} \sim$ 4 ; $\sqrt{19} \sim$ 5

2) $\sqrt{85} \sim$ 9 ; $\sqrt{85} \sim$ 10

3) $\sqrt{46} \sim$ 6 ; $\sqrt{46} \sim$ 7

4) $\sqrt{54} \sim$ 7 ; $\sqrt{54} \sim$ 8

5) $\sqrt{72} \sim$ 8 ; $\sqrt{72} \sim$ 9

6) $\sqrt{130} \sim$ 11 ; $\sqrt{130} \sim$ 12

7) $\sqrt{152} \sim$ 12 ; $\sqrt{152} \sim$ 13

8) $\sqrt{181} \sim$ 13 ; $\sqrt{181} \sim$ 14

9) $\sqrt{34} \sim$ 5 ; $\sqrt{34} \sim$ 6

10) $\sqrt{83} \sim$ 9 ; $\sqrt{83} \sim$ 10

11) $\sqrt{45} \sim$ 6 ; $\sqrt{45} \sim$ 7

12) $\sqrt{57} \sim$ 7 ; $\sqrt{57} \sim$ 8

13) $\sqrt{71} \sim$ 8 ; $\sqrt{71} \sim$ 9

14) $\sqrt{129} \sim$ 11 ; $\sqrt{129} \sim$ 12

15) $\sqrt{164} \sim$ 12 ; $\sqrt{164} \sim$ 13

16) $\sqrt{240} \sim$ 15 ; $\sqrt{240} \sim$ 16

17) $\sqrt{380} \sim$ 18 ; $\sqrt{380} \sim$ 19

18) $\sqrt{95} \sim$ 9 ; $\sqrt{95} \sim$ 10

UM ELEMENTO IMPORTANTE: O RESTO DA RAIZ QUADRADA

Observe:

$\sqrt{13} \sim 3$ (raiz quadrada por falta a menos de uma unidade, pois $3^2 = 9 < 13$)

Vejamos agora como se determina o resto da raiz quadrada:

$13 - 3^2 = 13 - 9 = 4$ (resto da raiz quadrada)

Então, resto da raiz quadrada de um número é o excesso desse número sobre o maior quadrado nele contido.

Determine a raiz quadrada por falta e por excesso a menos de uma unidade e indique o resto:

1) $\sqrt{8} \sim 2$; $\sqrt{8} \sim 3$; resto $= 8 - 2^2 = 4$

2) $\sqrt{5} \sim 2$; $\sqrt{5} \sim 3$; resto $= 5 - 2^2 = 1$

3) $\sqrt{7} \sim 2$; $\sqrt{7} \sim 3$; resto $= 7 - 2^2 = 3$

4) $\sqrt{3} \sim 1$; $\sqrt{3} \sim 2$; resto $= 3 - 1^2 = 2$

5) $\sqrt{10} \sim 3$; $\sqrt{10} \sim 4$; resto $= 10 - 3^2 = 1$

6) $\sqrt{12} \sim 3$; $\sqrt{12} \sim 4$; resto $= 12 - 3^2 = 3$

7) $\sqrt{15} \sim 3$; $\sqrt{15} \sim 4$; resto $= 15 - 3^2 = 6$

8) $\sqrt{30} \sim 5$; $\sqrt{30} \sim 6$; resto $= 30 - 5^2 = 5$

9) $\sqrt{80} \sim 8$; $\sqrt{80} \sim 9$; resto $= 80 - 8^2 = 16$

10) $\sqrt{45} \sim 6$; $\sqrt{45} \sim 7$; resto $= 45 - 6^2 = 9$

11) $\sqrt{75} \sim 8$; $\sqrt{75} \sim 9$; resto $= 75 - 8^2 = 11$

12) $\sqrt{62} \sim 7$; $\sqrt{62} \sim 8$; resto $= 62 - 7^2 = 13$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Indique, por decomposição, a raiz quadrada exata dos números:

1) 16 | 2; 8 | 2; 4 | 2; 2 | 2; 1

$16 = 2^4$

$\sqrt{16} = 2^2 = 4$

2) 36 | 2; 18 | 2; 9 | 3; 3 | 3; 1

$36 = 2^2 \times 3^2$

$\sqrt{36} = 2 \times 3 = 6$

3) 64 | 2; 32 | 2; 16 | 2; 8 | 2; 4 | 2; 2 | 2; 1

$64 = 2^6$

$\sqrt{64} = 2^3 = 8$

4) 144 | 2; 72 | 2; 36 | 2; 18 | 2; 9 | 3; 3 | 3; 1

$144 = 2^4 \times 3^2$

$\sqrt{144} = 2^2 \times 3 = 12$

5) 81 | 3; 27 | 3; 9 | 3; 3 | 3; 1

$81 = 3^4$

$\sqrt{81} = 3^2 = 9$

6) 225 | 3; 75 | 3; 25 | 5; 5 | 5; 1

$225 = 3^2 \times 5^2$

$\sqrt{225} = 3 \times 5 = 15$

7) 441 | 3
147 | 3
49 | 7
7 | 7
1 |

$441 = 3^2 \times 7^2$

$\sqrt{441} = 3 \times 7 = 21$

8) 25 | 5
5 | 5
1 |

$25 = 5^2$

$\sqrt{25} = 5$

b) Determine a raiz quadrada aproximada por falta e por excesso a menos de uma unidade e indique o resto:

1) $\sqrt{6} \sim 2$
$\sqrt{6} \sim 3$
resto $= 6 - 2^2 = 2$

2) $\sqrt{11} \sim 3$
$\sqrt{11} \sim 4$
resto $= 11 - 3^2 = 2$

3) $\sqrt{14} \sim 3$
$\sqrt{14} \sim 4$
resto $= 14 - 3^2 = 5$

4) $\sqrt{18} \sim 4$
$\sqrt{18} \sim 5$
resto $= 18 - 4^2 = 2$

5) $\sqrt{40} \sim 6$
$\sqrt{40} \sim 7$
resto $= 40 - 6^2 = 4$

6) $\sqrt{90} \sim 9$
$\sqrt{90} \sim 10$
resto $= 90 - 9^2 = 9$

7) $\sqrt{120} \sim 10$
$\sqrt{120} \sim 11$
resto $= 120 - 10^2 = 20$

8) $\sqrt{390} \sim 19$
$\sqrt{390} \sim 20$
resto $= 390 - 19^2 = 29$

9) $\sqrt{70} \sim 8$
$\sqrt{70} \sim 9$
resto $= 70 - 8^2 = 6$

DISPOSITIVO PRÁTICO PARA A EXTRAÇÃO DA RAIZ QUADRADA (EXATA OU APROXIMADA)

Vamos encontrar a raiz quadrada de 6 252.

$\sqrt{6\,252} = ?$

1.º passo	2.º passo	3.º passo	4.º passo
$\sqrt{\boxed{62}\ \boxed{52}}$ Formam-se grupos de dois algarismos a partir da direita. O último grupo à esquerda pode ter só um algarismo.	$\sqrt{\boxed{62}\ \boxed{52}}$ | 7 Determina-se a raiz quadrada exata ou por falta a menos de uma unidade do primeiro grupo à esquerda: $\sqrt{62} \sim 7$	$\sqrt{\boxed{62}\ \boxed{52}}$ | 7 ; -49 ; 13. Eleva-se a raiz encontrada à segunda potência e subtrai-se o resultado do primeiro grupo à esquerda: $7^2 = 49$; $62 - 49 = 13$	$\sqrt{\boxed{62}\ \boxed{52}}$ | 7 ; -49 ; 13 52. Escreve-se o grupo seguinte (52) ao lado do resto (13). Obtém-se assim o primeiro resto parcial.

5.º passo	6.º passo	7.º passo	8.º passo
$\sqrt{62\ 52}$ → 7 ; 14 − 49 13 52	$\sqrt{62\ 52}$ → 7 ; 149 − 49 13 52	$\sqrt{62\ 52}$ → 7 ; 149 × 9 = = 1 341 − 49 13 52 − 13 41 11	$\sqrt{62\ 52}$ → 79 ; 149 × 9 = = 1 341 − 49 13 52 − 13 41 11
Escreve-se abaixo da raiz (7) o seu dobro (14). Separa-se o último algarismo à direita do primeiro resto parcial. O número obtido com os algarismos restantes divide-se pelo dobro da raiz: 135 [2] ⟹ 135 : 14 = 9	Escreve-se o quociente aproximado obtido (9) ao lado do dobro da raiz, formando assim um outro número (149).	Multiplica-se o número formado (149) pelo próprio quociente (9) e subtrai-se o resultado do primeiro resto parcial. Se o resultado da multiplicação for maior que o primeiro resto parcial, diminui-se o quociente em uma unidade e repete-se o processo.	Escreve-se o quociente (9) ao lado do primeiro algarismo da raiz (7), formando então a raiz 79.

Então:

$\sqrt{6\,252} \sim 79$ (raiz quadrada por falta a menos de 1 unidade)

Vejamos outro exemplo: vamos encontrar a raiz quadrada de 54 756.

$\sqrt{54\,756} = ?$

Então: $\sqrt{54\,756} = 234$ (Raiz quadrada exata, pois o resto é zero. Logo, 54 756 é quadrado perfeito.)

A PROVA DA RAIZ QUADRADA

Para saber se o resultado obtido está correto, eleva-se a raiz quadrada à segunda potência e adiciona-se o resto. O resultado encontrado deve ser igual ao número dado.

Veja:

$\sqrt{6\,252} \sim 79$

resto = 11

Prova
$79^2 + 11 \overset{?}{=} 6\,252$
$6\,241 + 11 = 6\,252$
$6\,252 = 6\,252$ (V)

$\sqrt{54\,756} = 234$

resto = 0

Prova
$234^2 + 0 \overset{?}{=} 54\,756$
$54\,756 + 0 = 54\,756$
$54\,756 = 54\,756$ (V)

Agora você vai extrair a raiz quadrada pelo dispositivo prático e fazer a prova:

1) $\sqrt{18\ 49}$ — 43; 83 × 3 = 249; 16; 249; −249; 0

Prova: $43^2 + 0 = 1\,849$; $1\,849 + 0 = 1\,849$; $1849 = 1\,849$ (V)

Logo: $\sqrt{1\,849}$ = 43

2) $\sqrt{30\ 25}$ — 55; 105 × 5 = 525; −25; 525; −525; 0

Prova: $55^2 + 0 = 3\,025$; $3\,025 + 0 = 3\,025$; $3025 = 3\,025$ (V)

Logo: $\sqrt{3\,025}$ = 55

3) $\sqrt{54\ 76}$ — 74; 144 × 4 = 576; −49; 576; −576; 0

Prova: $74^2 + 0 = 5\,476$; $5\,476 + 0 = 5\,476$; $5\,476 = 5\,476$ (V)

Logo: $\sqrt{5\,476}$ = 74

4) $\sqrt{7\ 50}$ — 27; 47 × 7 = 329; −4; 350; −329; 21

Prova: $27^2 + 21 = 750$; $729 + 21 = 750$; $750 = 750$ (V)

Logo: $\sqrt{750} \sim$ 27

5) $\sqrt{9 \cdot 46}$

$$\begin{array}{l|l} 9\ 46 & 30 \\ -9 & 60 \times 0 = 0 \\ 0\ 46 & \\ -\ 0 & \\ 46 & \end{array}$$

Prova: $30^2 + 46 = 946$
$900 + 46 = 946$
$946 = 946$ (V)

Logo: $\sqrt{946} \sim$ 30

6) $\sqrt{83\ 20}$

$$\begin{array}{l|l} 83\ 20 & 91 \\ -81 & 181 \times 1 = 181 \\ 220 & \\ -181 & \\ 35 & \end{array}$$

Prova: $91^2 + 39 = 8\,320$
$8\,281 + 39 = 8\,320$
$8\,320 = 8\,320$ (V)

Logo: $\sqrt{8\,320} \sim$ 91

7) $\sqrt{28\ 30\ 24}$

$$\begin{array}{l|l} 28\ 30\ 24 & 532 \\ -25 & 103 \times 3 = 309 \\ 330 & 1062 \times 2 = 2\,124 \\ -309 & \\ 2\,124 & \\ -2\,124 & \\ 0 & \end{array}$$

Prova: $532^2 + 0 = 283\,024$
$283\,024 + 0 = 283\,024$
$283\,024 = 283\,024$ (V)

Logo: $\sqrt{283\,024} =$ 532

8) $\sqrt{11\ 42\ 44}$

$$\begin{array}{l|l} 11\ 42\ 44 & 338 \\ -9 & 63 \times 3 = 189 \\ 242 & 668 \times 8 = 5\,344 \\ -189 & \\ 5\,344 & \\ -5\,344 & \\ 0 & \end{array}$$

Prova: $338^2 + 0 = 114\,244$
$114\,244 + 0 = 114\,244$
$114\,244 = 114\,244$ (V)

Logo: $\sqrt{114\,244} =$ 338

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Extraia a raiz quadrada e faça a prova:

1) $\sqrt{1\ 16\ 64}$

$$\begin{array}{l|l} 1\ 16\ 64 & 108 \\ -1 & 20 \times 0 = 0 \\ 016 & 208 \times 8 = 1\,664 \\ -0 & \\ 1\,664 & \\ -1\,664 & \\ 0 & \end{array}$$

Prova: $108^2 + 0 = 11\,664$
$11\,664 + 0 = 11\,664$
$11\,664 = 11\,664$ (V)

Logo: $\sqrt{11\,664} =$ 108

2) $\sqrt{1\ 48\ 84}$

$$\begin{array}{l|l} 1\ 48\ 84 & 122 \\ -1 & 22 \times 2 = 44 \\ 048 & 242 \times 2 = 484 \\ -44 & \\ 484 & \\ -484 & \\ 0 & \end{array}$$

Prova: $122^2 + 0 = 14\,884$
$14\,884 + 0 = 14\,884$
$14\,884 = 14\,884$ (V)

Logo: $\sqrt{14\,884} =$ 122

3) $\sqrt{1\ 79\ 56}$

$$\begin{array}{l|l} 1\ 79\ 56 & 134 \\ -1 & 23 \times 3 = 69 \\ 079 & 264 \times 4 = 1\,056 \\ -69 & \\ 1\,056 & \\ -1\,056 & \\ 0 & \end{array}$$

Prova: $134^2 + 0 = 17\,956$
$17\,956 + 0 = 17\,956$
$17\,956 = 17\,956$ (V)

Logo: $\sqrt{17\,956} =$ 134

4) $\sqrt{1\ 04\ 09}$

$$\begin{array}{l|l} 1\ 04\ 09 & 102 \\ -1 & 20 \times 0 = 0 \\ 004 & 202 \times 2 = 404 \\ -0 & \\ 409 & \\ -404 & \\ 5 & \end{array}$$

Prova: $102^2 + 5 = 10\,409$
$10\,404 + 5 = 10\,409$
$10\,409 = 10\,409$ (V)

Logo: $\sqrt{10\,409} \sim$ 102

5) $\sqrt{1\ 56\ 30}$ | 125
-1 | 22 × 2 = 44
056 | 245 × 5 = 1 225
-44
1230
-1225
5

Prova: $125^2 + 5 = 15\ 630$
15 625 + 5 = 15 630
15 630 = 15 630 (V)

Logo: $\sqrt{15\ 630} \sim$ 125

6) $\sqrt{1\ 23\ 24}$ | 111
-1 | 21 × 1 = 21
023 | 221 × 1 = 221
-21
224
-221
3

Prova: $111^2 + 3 = 12\ 324$
12 321 + 3 = 12 324
12 324 = 12 324 (V)

Logo: $\sqrt{12\ 324} \sim$ 111

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Complete adequadamente:

1) $\sqrt{336} \sim 18$ resto = 12

2) $\sqrt{150} \sim 12$ resto = 6

3) $\sqrt{1009} \sim 31$ resto = 48

4) $\sqrt{1\ 225} = 35$ resto = 0

b) Extraia a raiz quadrada dos números que seguem, usando o método da decomposição:

1) 576 (24)
2) 729 (27)
3) 1 296 (36)
4) 3 969 (63)
5) 6 561 (81)
6) 9 216 (96)

c) Utilizando o dispositivo prático, extraia a raiz quadrada dos seguintes números:

1) 15 129 (123)
2) 18 225 (135)
3) 34 969 (187)
4) 41 616 (204)
5) 76 176 (276)
6) 94 249 (307)

d) Determine as raízes quadradas aproximadas por falta a menos de uma unidade e indique os respectivos restos:

1) $\sqrt{8}$ {raiz = 2; resto = 4}
2) $\sqrt{12}$ {raiz = 3; resto = 3}
3) $\sqrt{20}$ {raiz = 4; resto = 4}
4) $\sqrt{45}$ {raiz = 6; resto = 9}
5) $\sqrt{62}$ {raiz = 7; resto = 13}
6) $\sqrt{80}$ {raiz = 8; resto = 16}
7) $\sqrt{69\ 845}$ {raiz = 264; resto = 149}
8) $\sqrt{81\ 329}$ {raiz = 285; resto = 104}

e) Resolva:

1) A raiz quadrada exata de um número é 15. Qual é esse número? (225)

2) Descubra qual é o número cuja raiz quadrada exata é 23. (529)

3) A raiz quadrada aproximada de um número por falta a menos de uma unidade é 8. Determine esse número, sabendo que o resto da raiz é 6. (70)

4) Um certo número apresenta raiz quadrada aproximada por falta a menos de uma unidade igual a 12. Descubra qual é esse número, sabendo que o resto da raiz é 10. (154)

5) A idade de Lígia é dada pelo número cuja raiz quadrada aproximada por falta a menos de uma unidade é 2. Descubra a idade de Lígia, sabendo que o resto da raiz é igual a 3. (7)

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS RELATIVOS

FORMAS DE REPRESENTAR UM NÚMERO FRACIONÁRIO

Vamos recordar. Considere a tabela de dupla entrada para a divisão em $\mathbb{Z}$.

divisor (colunas) / dividendo (linhas)

:	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5
+ 1	+ 1				
+ 2	+ 2	+ 1			
+ 3	+ 3		+ 1		
+ 4	+ 4	+ 2		+ 1	
+ 5	+ 5				+ 1

Dividendo : divisor = quociente (divisão exata)

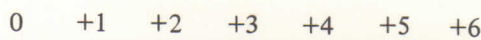
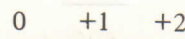
Note que na tabela só aparecem os quocientes onde o primeiro elemento do par (dividendo) é múltiplo do segundo (divisor). Isto ocorre porque a divisão não apresenta a propriedade **fechamento** em $\mathbb{Z}$.

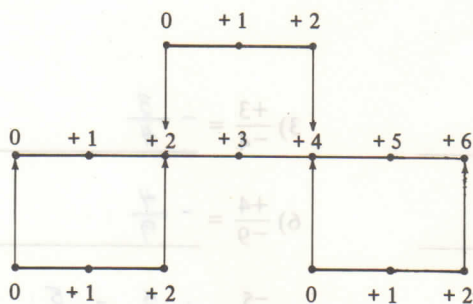
Então temos:

$(+1) : (+1) = +1$ $\quad$ $(+2) : (+2) = +1$ $\quad$ $(+4) : (+2) = +2$

$(+1) : (+2) = ? \notin \mathbb{Z}$ $\quad$ $(+2) : (+3) = ? \notin \mathbb{Z}$ $\quad$ $(+4) : (+3) = ? \notin \mathbb{Z}$

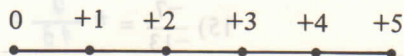
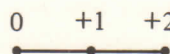
- Como interpretar a divisão $(+6) : (+2)$?

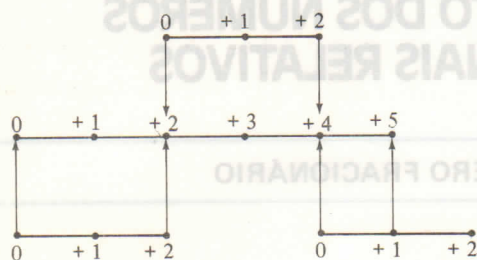
Veja:

0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 — dividendo = + 6 $\qquad$ 0 +1 +2 — divisor = + 2

Agora pense nisto: quantas vezes o divisor cabe no dividendo?

Cabe exatamente três vezes.

Então: $(+6) : (+2) = +3$

- Como interpretar a divisão: $(+5) : (+2)$?

Veja:

0 +1 +2 +3 +4 +5 — dividendo = + 5 $\qquad$ 0 +1 +2 — divisor = + 2

Quantas vezes o divisor cabe no dividendo?

Cabe duas vezes e meia.

Mas, como representar isso?

Representa-se assim:

$(+5):(+2) = \boxed{\frac{+5}{+2}}$ ou $(+5):(+2) = \boxed{+2\frac{1}{2}}$ ou $(+5):(+2) = \boxed{+2{,}5}$

fração — numeral misto — numeral decimal

A fração, o numeral misto e o numeral decimal, conforme você aprendeu na 5.ª série, são formas diferentes de representar o mesmo número: **o número fracionário**.

Escreva na forma de fração:

1) $(+5):(+3) = \frac{+5}{+3}$ 2) $(+2):(+3) = \frac{+2}{+3}$ 3) $(+1):(+2) = \frac{+1}{+2}$

4) $(+2):(+5) = \frac{+2}{+5}$ 5) $(+1):(+4) = \frac{+1}{+4}$ 6) $(+3):(+4) = \frac{+3}{+4}$

7) $(+1):(+5) = \frac{+1}{+5}$ 8) $(+4):(+5) = \frac{+4}{+5}$ 9) $(+1):(+6) = \frac{+1}{+6}$

10) $(+3):(+5) = \frac{+3}{+5}$

Quando se escreve o quociente em forma de fração, o numerador e o denominador são números inteiros relativos. Logo, condicionando esse quociente às regras de sinais estabelecidas para a divisão de números inteiros relativos, temos:

$\frac{+2}{+3} = +\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$; $\frac{-2}{+3} = -\frac{2}{3}$; $\frac{+2}{-3} = -\frac{2}{3}$; $\frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Complete:

1) $\frac{+3}{+5} = +\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$ 2) $\frac{+2}{+7} = +\frac{2}{7} = \frac{2}{7}$ 3) $\frac{+3}{-4} = -\frac{3}{4}$

4) $\frac{-3}{+4} = -\frac{3}{4}$ 5) $\frac{-2}{-5} = +\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ 6) $\frac{+4}{-9} = -\frac{4}{9}$

7) $\frac{+3}{-8} = -\frac{3}{8}$ 8) $\frac{-2}{+7} = -\frac{2}{7}$ 9) $\frac{-5}{-6} = +\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$

10) $\frac{-4}{-7} = +\frac{4}{7} = \frac{4}{7}$ 11) $\frac{+3}{+10} = +\frac{3}{10} = \frac{3}{10}$ 12) $\frac{-7}{-10} = +\frac{7}{10} = \frac{7}{10}$

13) $\frac{+9}{-11} = -\frac{9}{11}$ 14) $\frac{-5}{+11} = -\frac{5}{11}$ 15) $\frac{-7}{-13} = +\frac{7}{13} = \frac{7}{13}$

NOÇÃO DE NÚMERO RACIONAL RELATIVO

Todo número que pode ser representado por $\frac{a}{b}$, sendo $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, é um número racional relativo. O conjunto de números que engloba os números inteiros relativos e os números fracionários é chamado de **conjunto dos números racionais relativos.**

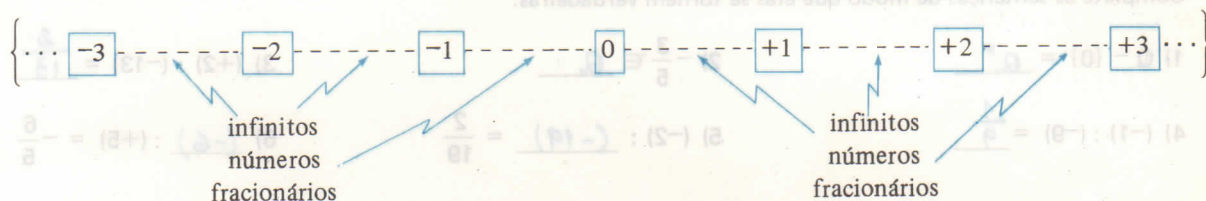
UM POUCO DE SIMBOLOGIA

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$ conjunto dos números inteiros relativos

$$\mathbb{Q} = \left\{\dots, -3, \dots, -\frac{5}{2}, \dots, -2, \dots, -\frac{3}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, 0, \dots, +\frac{1}{2}, \dots, +\frac{3}{2}, \dots, +2, \dots, +\frac{5}{2}, \dots, +3, \dots\right\}$$

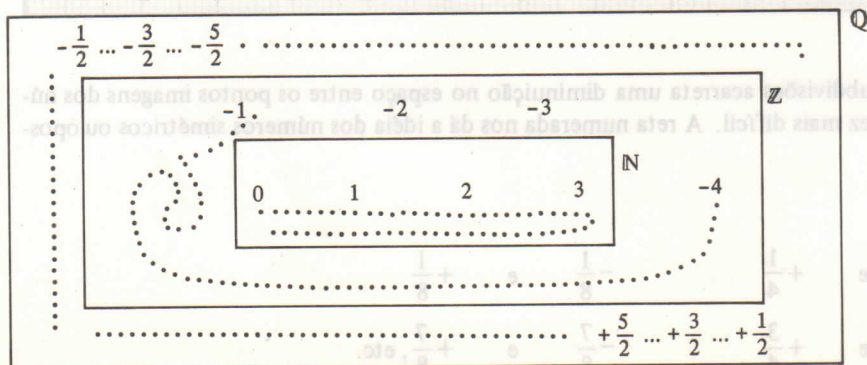
conjunto dos números racionais relativos

Torna-se difícil a representação do conjunto dos números racionais relativos por indicação dos seus elementos, uma vez que entre dois números inteiros consecutivos existe uma infinidade de números fracionários:

$\mathbb{Q}_+ = \left\{0, \dots, +\frac{1}{2}, \dots, +1, \dots, +\frac{3}{2}, \dots, +2, \dots\right\}$ conjunto dos números racionais não-negativos

$\mathbb{Q}_- = \left\{\dots, -2, \dots, -\frac{3}{2}, \dots, -1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, 0\right\}$ conjunto dos números racionais não-positivos

$\mathbb{Q}^*_+$ = conjunto dos números racionais positivos

$\mathbb{Q}^*_-$ = conjunto dos números racionais negativos

UM DIAGRAMA IMPORTANTE

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

ou

$\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$

VAMOS EXERCITAR

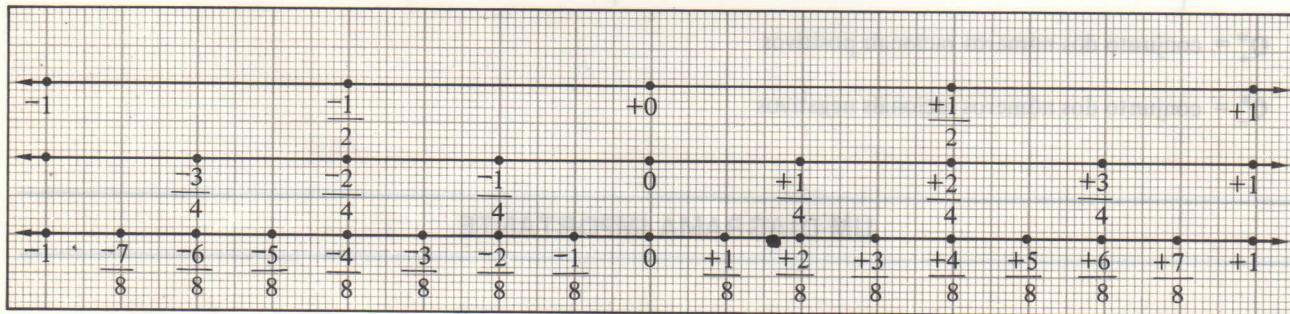
a) Complete adequadamente com os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$, $\cup$ ou $\cap$:

1) $4 \in \mathbb{N}$	2) $-2 \notin \mathbb{N}$	3) $-1 \in \mathbb{Z}$	4) $-\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}_-$
5) $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}^*$	6) $0 \in \mathbb{Z}_+$	7) $0 \in \mathbb{Z}_-$	8) $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$
9) $-\frac{2}{5} \notin \mathbb{Q}_+$	10) $+\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}_+^*$	11) $0 \in \mathbb{Q}$	12) $5 \in \mathbb{Q}$
13) $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$	14) $-1{,}5 \in \mathbb{Q}$	15) $-3\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$	16) $+2\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$
17) $-\frac{3}{10} \notin \mathbb{Q}_+$	18) $+\frac{7}{100} \in \mathbb{Q}_+^*$	19) $-0{,}5 \in \mathbb{Q}$	20) $+2{,}8 \notin \mathbb{Z}$
21) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	22) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	23) $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}$	24) $\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\}$
25) $\mathbb{Q}_+^* \cup \mathbb{Q}_-^* = \mathbb{Q}^*$	26) $\mathbb{Q}_+^* \cap \mathbb{Q}_-^* = \phi$	27) $\mathbb{Q}_+ \supset \mathbb{Q}_+^*$	28) $\mathbb{Q}_-^* \subset \mathbb{Q}_-$
29) $\{0\} \subset \mathbb{Q}$	30) $\mathbb{Z} \supset \{0\}$		

b) Complete as sentenças de modo que elas se tornem verdadeiras:

1) $\mathbb{Q} - \{0\} = \mathbb{Q}^*$	2) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$	3) $(+2) : (-13) = -\frac{2}{13}$
4) $(-1) : (-9) = \frac{1}{9}$	5) $(-2) : (-19) = \frac{2}{19}$	6) $(-6) : (+5) = -\frac{6}{5}$

A GRADUAÇÃO DA RETA NO CONJUNTO $\mathbb{Q}$

Observe:

Note que o aumento gradativo das subdivisões acarreta uma diminuição no espaço entre os pontos imagens dos números, o que torna a representação cada vez mais difícil. A reta numerada nos dá a idéia dos números simétricos ou opostos.

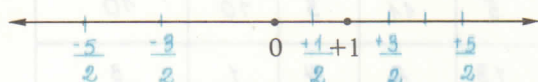
Exemplos:

-1 e $+1$	$-\frac{1}{4}$ e $+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$ e $+\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$ e $+\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{8}$ e $+\frac{7}{8}$, etc.

Localize na reta numerada:

1) Os pontos imagens dos números:

$+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2}$ $-\frac{3}{2}$ 0 $+\frac{1}{2}$ +1 $+\frac{3}{2}$ $+\frac{5}{2}$

São simétricos os números:

$-\frac{5}{2}$ e $+\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$ e $+\frac{3}{2}$

2) Os pontos imagens dos números:

$+1, +\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}, -1$

-1 $-\frac{1}{2}$ 0 $+\frac{1}{4}$ $+\frac{1}{2}$ $+1$

São simétricos os números:

-1 e $+1$, $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

3) Os pontos imagens dos números:

$+\frac{1}{8}, +\frac{1}{4}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}$

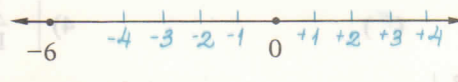
$-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{8}$ 0 $+\frac{1}{8}$ $+\frac{1}{4}$ $+\frac{1}{2}$ $+\frac{3}{4}$

São simétricos os números:

$-\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$

4) Os pontos imagens dos números:

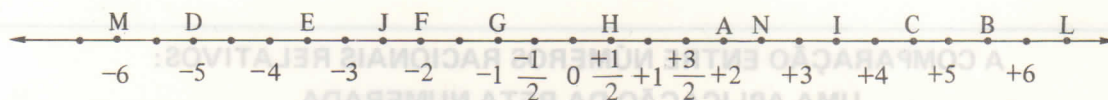
+1, +2, +3, +4, −1, −2, −3, −4

−6 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4

São simétricos os números:

−4 e +4, −3 e +3, −2 e +2, −1 e +1

Observe a reta numerada e complete as frases:

M D E J F G H A N I C B L

−6 −5 −4 −3 −2 −1 $-\frac{1}{2}$ 0 $+\frac{1}{2}$ +1 $+\frac{3}{2}$ +2 +3 +4 +5 +6

1) O ponto imagem do número $+\frac{1}{2}$ é H.

2) O ponto imagem do número $-\frac{5}{2}$ é J.

3) O ponto imagem do número $+\frac{7}{2}$ é I.

4) O ponto imagem do número −1 é G.

5) O ponto imagem do número $+\frac{9}{2}$ é C

6) A abscissa do ponto D é −5

7) A abscissa do ponto B é $+\frac{11}{2}$

8) A abscissa do ponto E é $-\frac{7}{2}$

9) A abscissa do ponto F é −2

10) A abscissa do ponto A é +2

11) O ponto N tem abscissa $+\frac{5}{2}$.

12) O ponto M tem abscissa −6.

13) O ponto L tem abscissa $+\frac{13}{2}$.

14) O simétrico do ponto A é o ponto F

15) O simétrico do ponto J é o ponto N.

16) O simétrico do ponto E é o ponto I

O MÓDULO DE UM NÚMERO RACIONAL RELATIVO

Veja:

Linguagem corrente	Linguagem matemática
Módulo de dois terços negativo é igual a dois terços	$\left\|-\frac{2}{3}\right\| = \frac{2}{3}$
Módulo de um quarto positivo é igual a um quarto	$\left\|+\frac{1}{4}\right\| = \frac{1}{4}$

Complete o quadro:

NÚMERO	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{4}{9}$	0	$-\frac{11}{2}$	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{13}{5}$	$+\frac{2}{11}$	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$
OPOSTO	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{5}$	$+\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{9}$	0	$+\frac{11}{2}$	$-\frac{7}{3}$	$+\frac{13}{5}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{1}{10}$	$+\frac{3}{10}$
MÓDULO	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

Coloque V ou F:

1) $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ (V)

2) $\left|+\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$ (V)

3) $\left|+\frac{1}{5}\right| = -\frac{1}{5}$ (F)

4) $\left|-\frac{3}{10}\right| = -\frac{3}{10}$ (F)

5) $\left|-\frac{3}{5}\right| = \left|+\frac{3}{5}\right|$ (V)

6) O simétrico de $\left|-\frac{1}{3}\right|$ é $-\frac{1}{3}$ (V)

7) O simétrico de $\left|+\frac{2}{7}\right|$ é $+\frac{2}{7}$ (F)

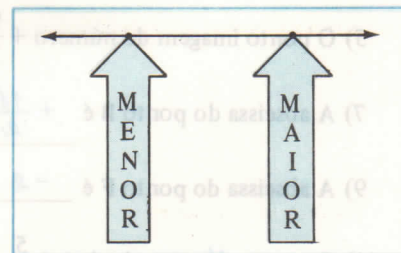
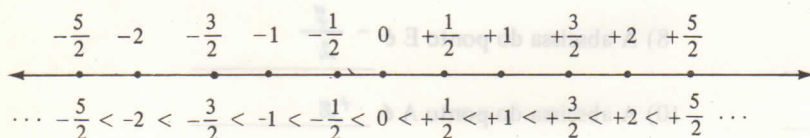
8) O simétrico de $-\left|-\frac{1}{10}\right|$ é $+\frac{1}{10}$ (V)

A COMPARAÇÃO ENTRE NÚMEROS RACIONAIS RELATIVOS: UMA APLICAÇÃO DA RETA NUMERADA

A comparação entre números racionais relativos é estabelecida da mesma maneira que a dos números inteiros relativos, pois $\mathbb{Z}$ está contido em $\mathbb{Q}$.

Observe:

$-\frac{5}{2}$ -2 $-\frac{3}{2}$ -1 $-\frac{1}{2}$ 0 $+\frac{1}{2}$ $+1$ $+\frac{3}{2}$ $+2$ $+\frac{5}{2}$

$\cdots -\frac{5}{2} < -2 < -\frac{3}{2} < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < +\frac{1}{2} < +1 < +\frac{3}{2} < +2 < +\frac{5}{2} \cdots$

AGORA FAÇA VOCÊ A COMPARAÇÃO

a) Complete, usando os sinais $>$, $<$ ou $=$:

1) $-\frac{3}{4}$ < $+\frac{1}{2}$

2) $-\frac{2}{5}$ < $-\frac{1}{5}$

3) $-\frac{1}{4}$ > -1

4) $+\frac{2}{5}$ > -5

5) $\left|-\frac{3}{7}\right|$ < $\left|+\frac{5}{7}\right|$

6) $+3$ < $+\frac{9}{2}$

7) $\left|-\frac{11}{4}\right|$ = $\left|+\frac{11}{4}\right|$

8) $+\frac{5}{8}$ > $-\frac{5}{8}$

9) 0 > $-\frac{11}{3}$

10) 0 < $+\frac{1}{9}$

11) $+\frac{3}{14}$ = $\left|-\frac{3}{14}\right|$

12) $+\frac{3}{5}$ < $\left|-\frac{8}{5}\right|$

13) $-\frac{2}{3}$ < $\left|-\frac{4}{3}\right|$

14) -1 > $-\frac{5}{2}$

15) $+\frac{7}{3}$ > $+1$

b) Escreva em ordem crescente:

1) $-2, +\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +1, -\frac{3}{4}$ $\Longrightarrow$ $-2 < -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} < +1 < +\frac{3}{2}$

2) $-\frac{2}{5}, +\frac{1}{8}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, +\frac{1}{4}$ $\Longrightarrow$ $-\frac{3}{5} < -\frac{2}{5} < -\frac{1}{5} < +\frac{1}{8} < +\frac{1}{4}$

3) $-1, 0, -\frac{3}{7}, +\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}$ $\Longrightarrow$ $-1 < -\frac{3}{7} < -\frac{2}{7} < 0 < +\frac{1}{7}$

4) $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, +\frac{1}{8}, -1$ $\Longrightarrow$ $-\frac{3}{2} < -1 < -\frac{1}{2} < +\frac{1}{8} < +\frac{1}{4}$

5) $-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, +\frac{1}{6}, -\frac{2}{8}, +5$ $\Longrightarrow$ $-\frac{3}{8} < -\frac{2}{8} < -\frac{1}{8} < +\frac{1}{6} < +5$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Associe as colunas da esquerda com as da direita:

1) $(+2) : (+5)$	4) $(+2) : (-5)$	(4) $-\frac{2}{5}$	(1) $+\frac{2}{5}$
2) $(-3) : (-4)$	5) $(+3) : (-4)$	(6) $-\frac{3}{5}$	(3) $+\frac{3}{5}$
3) $(-3) : (-5)$	6) $(-3) : (+5)$	(5) $-\frac{3}{4}$	(2) $+\frac{3}{4}$

Agora complete:

Nas colunas da direita, de cima para baixo, formaram-se os números naturais *quatrocentos e sessenta e cinco* e *cento e trinta e dois*, cujos numerais são *465* e *132*.

b) Coloque V nas sentenças verdadeiras e F nas falsas:

1) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ (F)	2) $\mathbb{N} \supset \mathbb{Q}$ (F)	3) $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ (V)	4) $\mathbb{Z} \supset \mathbb{Q}$ (F)
5) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (V)	6) $+\frac{5}{3} \notin \mathbb{Q}$ (F)	7) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ (F)	8) $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ (V)

c) Efetue as operações:

1) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$	2) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$	3) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$	4) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$
5) $\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}$	6) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$	7) $\mathbb{Q}_- \cup \mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q}$	8) $\mathbb{Q}_- \cap \mathbb{Q}_+ = \{0\}$
9) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{N} = \{0\}$	10) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$	11) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$	12) $\mathbb{N}^* \cup \{0\} = \mathbb{N}$

d) Complete as sentenças adequadamente:

1) Entre dois números racionais positivos, o maior é aquele que tem o *maior* valor absoluto.

2) Entre dois números racionais negativos, o maior é aquele que tem o *menor* valor absoluto.

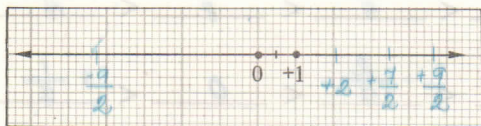
3) Qualquer número racional positivo é *maior* que qualquer número racional negativo.

4) Dois números racionais simétricos têm módulos *iguais*.

5) Qualquer número ralativo é sempre maior do que todos os que estão à sua *esquerda* e sempre *menor* do que todos os que estão à sua direita na reta numerada.

e) Localize na reta numerada:

1) Os pontos imagens dos números:

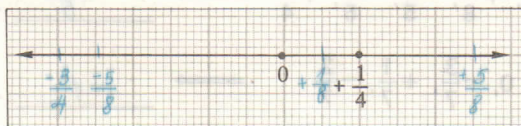
$+\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}, +2, +\frac{9}{2}$

São simétricos os números:

$-\frac{9}{2}$ e $+\frac{9}{2}$

A ordem crescente dos números dados é:

$-\frac{9}{2} < +2 < +\frac{7}{2} < +\frac{9}{2}$

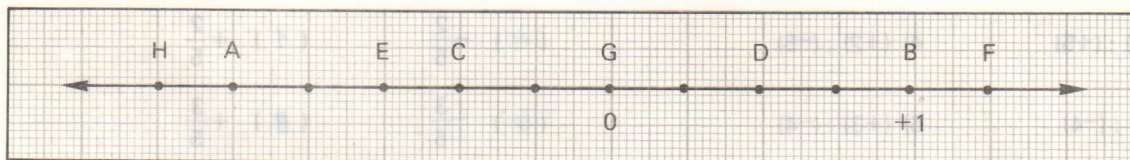
2) Os pontos imagens dos números:

$-\frac{5}{8}, +\frac{1}{8}, -\frac{3}{4}, +\frac{5}{8}$

São simétricos os números:

$-\frac{5}{8}$ e $+\frac{5}{8}$

A ordem decrescente dos números dados é:

$+\frac{5}{8} > +\frac{1}{8} > -\frac{5}{8} > -\frac{3}{4}$

f) Observe a reta numerada:

Agora responda:

1) O ponto imagem do número + 1 é B

2) O ponto imagem do número $+\frac{1}{2}$ é D

3) O ponto imagem do número $-\frac{3}{4}$ é E

4) O ponto imagem do número $-\frac{5}{4}$ é A

5) O ponto imagem do número $+\frac{5}{4}$ é F

6) A abscissa do ponto C é $-\frac{1}{2}$

7) A abscissa do ponto G é 0

8) O simétrico do ponto C é D

9) O simétrico do ponto F é A.

10) O ponto H tem abscissa $-\frac{3}{2}$.

g) Torne as sentenças verdadeiras utilizando os sinais $>$ ou $<$:

1) $-\frac{5}{4} < -\frac{1}{4}$

2) $-3 < +\frac{1}{8}$

3) $+\frac{1}{10} > 0$

4) $0 > -\frac{5}{6}$

5) $\left|-\frac{7}{8}\right| > \left|-\frac{3}{8}\right|$

6) $-1 < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$

7) $+1 > +\frac{1}{2} > +\frac{1}{4}$

8) $-2 > -\frac{5}{2}$

AS OPERAÇÕES COM OS NÚMEROS RACIONAIS RELATIVOS

De modo geral, as operações efetuadas com os números racionais relativos são as mesmas estudadas na 5.ª série, bastando agora fazer a adaptação às regras de sinais e reestruturar algumas propriedades.

Vejamos então um quadro das operações:

Adição	Subtração	Multiplicação
Denominadores iguais: $\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(+\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{2+4}{5}=\frac{6}{5}$ $\left(+\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4-3}{5}=\frac{1}{5}$ Denominadores diferentes: $\left(+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{5}-\frac{3}{4}=\frac{4}{20}-\frac{15}{20}=-\frac{11}{20}$ m.m.c. (4, 5) = 20	Denominadores iguais: $\left(+\frac{1}{3}\right)-\left(+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$ $\left(+\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5}$ Denominadores diferentes: $\left(+\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{11}{12}$ m.m.c. (4, 3) = 12	$\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}\right)=+\frac{2}{12}=+\frac{1}{6}$ $\left(+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{15}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)=+\frac{2}{21}$

Divisão	Potenciação	Radiciação
$\left(+\frac{2}{3}\right):\left(+\frac{1}{2}\right)=\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{2}{1}\right)=+\frac{4}{3}$ $\left(+\frac{1}{5}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{10}$ $\left(-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{4}{5}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=+\frac{5}{8}$	$\left(+\frac{2}{3}\right)^2=+\frac{4}{9}$ $\left(+\frac{2}{5}\right)^3=+\frac{8}{125}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=+\frac{4}{9}$ $\left(-\frac{2}{5}\right)^3=-\frac{8}{125}$	$\sqrt{+\frac{4}{9}}=+\frac{2}{3}$ $-\sqrt{+\frac{16}{25}}=-\left(+\frac{4}{5}\right)=-\frac{4}{5}$ $\sqrt{-\frac{9}{16}}=?\notin Q$

Como você já conhece bem todas essas operações, vamos apenas revê-las em forma de exercícios.

ADIÇÃO

1) $\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=+\frac{3}{12}-\frac{8}{12}=-\frac{5}{12}$

2) $\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=+\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=+\frac{17}{12}$

3) $\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(+2\right)=+\frac{1}{3}+2=+\frac{1}{3}+\frac{6}{3}=+\frac{7}{3}$

4) $\left(+\frac{7}{15}\right)+\left(-\frac{4}{15}\right)=+\frac{7}{15}-\frac{4}{15}=+\frac{3}{15}$

5) $\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=+\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=+\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=-\frac{7}{12}$

6) $\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=-\frac{5}{8}$

7) $\left(-\frac{6}{5}\right)+\left(+\frac{1}{10}\right)=-\frac{6}{5}+\frac{1}{10}=-\frac{12}{10}+\frac{1}{10}=-\frac{11}{10}$

8) $\left(-\frac{1}{7}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{1}{7}-\frac{2}{5}=-\frac{5}{35}-\frac{14}{35}=-\frac{19}{35}$

9) $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right) = + \frac{3}{4} + \frac{5}{2} = + \frac{3}{4} + \frac{10}{4} = + \frac{13}{4}$

10) $\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(+\frac{4}{3}\right) = - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} = - \frac{4}{9} + \frac{12}{9} = + \frac{8}{9}$

SUBTRAÇÃO

1) $\left(+\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{2}{5}\right) = +\frac{1}{3} - \frac{2}{5} = +\frac{5}{15} - \frac{6}{15} = -\frac{1}{15}$

2) $\left(+\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = +\frac{1}{4} + \frac{6}{4} = +\frac{7}{4}$

3) $\left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{2}{5} + \frac{7}{3} = -\frac{6}{15} + \frac{35}{15} = +\frac{29}{15}$

4) $(-2) - \left(+\frac{1}{7}\right) = -2 - \frac{1}{7} = -\frac{14}{7} - \frac{1}{7} = -\frac{15}{7}$

5) $\left(+\frac{9}{2}\right) - \left(+\frac{7}{3}\right) = +\frac{9}{2} - \frac{7}{3} = +\frac{27}{6} - \frac{14}{6} = +\frac{13}{6}$

6) $\left(+\frac{11}{2}\right) - (+3) = +\frac{11}{2} - 3 = +\frac{11}{2} - \frac{6}{2} = +\frac{5}{2}$

7) $\left(-\frac{1}{3}\right) - (-5) = -\frac{1}{3} + 5 = -\frac{1}{3} + \frac{15}{3} = +\frac{14}{3}$

8) $\left(+\frac{6}{7}\right) - \left(+\frac{7}{3}\right) = +\frac{6}{7} - \frac{7}{3} = +\frac{18}{21} - \frac{49}{21} = -\frac{31}{21}$

9) $\left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{11}{5}\right) = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5} = +\frac{9}{5}$

10) $\left(+\frac{2}{5}\right) - \left(+\frac{5}{3}\right) = +\frac{2}{5} - \frac{5}{3} = +\frac{6}{15} - \frac{25}{15} = -\frac{19}{15}$

Expressões numéricas envolvendo adição e subtração

Observe:

$$\boxed{\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{10}{6} - \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \boxed{\frac{11}{6}}$$

adição algébrica

m.m.c. (3, 2, 3) = 6

soma algébrica

Agora dê o resultado das expressões abaixo:

1) $\left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{30}$

2) $(+4) + \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{19}{6}$

3) $\left(-\frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{16}{9}$

4) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(+\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

5) $\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{49}{60}$

6) $\left(+\frac{5}{3}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right) + \left(+\frac{2}{7}\right) = +\frac{143}{84}$

7) $(+3) - \left\{+\frac{2}{5} - 2 - \left[-\frac{7}{10} + \left(+\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} - 6\right]\right\} = -\frac{3}{5}$

8) $(-8) + \left\{+\left[+2 - \frac{1}{2} + \left(-2 + \frac{6}{5}\right)\right]\right\} = -\frac{73}{10}$

9) $(+8) - \left\{-\left[-2 + \frac{1}{2} - \left(+2 - \frac{6}{5}\right)\right]\right\} = +\frac{57}{10}$

10) $(-2) + \left\{-1 + \left[+\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \left(+\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) - 3\right] - \frac{2}{5} + 1\right\} = -6$

11) $(-2) - \left[-\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)\right] - \left\{-\frac{5}{2} - \left[-2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{3} - 1\right)\right]\right\} = +\frac{1}{4}$

12) $\left\{-\left[-2 - \left(+\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + 1\right) - 5 + \frac{1}{5} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] - 1\right\} + \frac{1}{3} = +\frac{199}{30}$

13) $\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) - \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{43}{60}$

14) $\left(-\frac{1}{9}\right) - \left(+\frac{3}{9}\right) + \left(-\frac{5}{9}\right) = -1$

15) $\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{12}$

16) $\left(+\frac{4}{9}\right) - \left(+\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{1}{18}\right) - \left(+\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}$

17) $(+5) + \left(+\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right) = +\frac{67}{12}$

18) $(+2) + \left(+\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = +\frac{25}{12}$

19) $\left(+\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{30}$

20) $\left(+\frac{5}{8}\right) - \left(+\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{8}$

21) $\left(+\frac{1}{4}\right) - \left(+\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{4}$

22) $\left(+3 - \frac{1}{4}\right) + \left(+2 - \frac{1}{2}\right) = +\frac{17}{4}$

23) $\left(+\frac{7}{8}\right) - \left(+2 + \frac{3}{4}\right) - \left(+\frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{8}$

24) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{10}{3}\right) = -3$

25) $\left(+3 - \frac{1}{4}\right) + \left(+2 + \frac{1}{5}\right) = +\frac{99}{20}$

26) $\left(-\frac{5}{6}\right) - \left[+3 + \left(+\frac{7}{10} - 5 - \frac{3}{4}\right) - \frac{11}{24}\right] = +\frac{67}{40}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Efetue:

1) $+\frac{5}{7} - 3 = -\frac{16}{7}$

2) $-\frac{3}{4} + 2 = +\frac{5}{4}$

3) $-5 - \frac{3}{8} = -\frac{43}{8}$

4) $+5 - \frac{8}{5} = +\frac{17}{5}$

5) $-3 + \frac{5}{8} - \frac{7}{10} + \frac{9}{20} = -\frac{21}{8}$

6) $-2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = -\frac{59}{30}$

7) $-2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = -\frac{61}{30}$

8) $\left(-\frac{1}{4}\right) - \left(+\frac{3}{5}\right) = -\frac{17}{20}$

9) $\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

10) $\left(-\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{5}{12}\right) - \left(+\frac{7}{10}\right) = -\frac{79}{120}$

b) Dê o simétrico do resultado das seguintes expressões numéricas:

1) $+\frac{5}{6} + \frac{2}{3} - 3 + \frac{1}{2}$ $(+1)$

2) $+5\frac{1}{2} - 3 + \frac{2}{5}$ $\left(-\frac{29}{10}\right)$

3) $+\frac{4}{3} - \left(1\frac{2}{3} - 2\right)$ $\left(-\frac{5}{3}\right)$

4) $+\frac{4}{5} + 2\frac{1}{3} - 7$ $\left(+\frac{58}{15}\right)$

5) $\left(+\frac{3}{5} + \frac{2}{7}\right) - 1$ $\left(+\frac{4}{35}\right)$

6) $+4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}$ $\left(-\frac{13}{6}\right)$

7) $\left(-\frac{1}{2}\right) - \left\{\left(-\frac{2}{5}\right) + \left[-3 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}$ $\left(-\frac{53}{20}\right)$

8) $\left(+\frac{2}{3}\right) + \left\{\left[\left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}$ $\left(-\frac{79}{60}\right)$

9) $\left(-\frac{1}{5}\right) - \left[\left(-\frac{1}{6}\right) - \left(+\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\right]$ $\left(+\frac{7}{60}\right)$

MULTIPLICAÇÃO

1) $\left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{5}\right) = +\frac{2}{15}$

2) $\left(+\frac{2}{5}\right) \cdot \left(+\frac{4}{3}\right) = +\frac{8}{15}$

3) $\left(+\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{6}{35}$

4) $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = +\frac{1}{24}$

5) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = +\frac{2}{3}$

6) $\left(+\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{9}{20}$

7) $(+5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{6}$

8) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{7}{8}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = +\frac{35}{36}$

9) $\left(+\frac{1}{4}\right) \cdot \left(+\frac{3}{2}\right) = +\frac{3}{8}$

10) $\left(+\frac{5}{4}\right) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) = +\frac{5}{8}$

11) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{6}$

12) $\left(+\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{6}$

13) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{3}$

14) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

15) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{8}{3}$

16) $\left(+\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = +\frac{1}{30}$

Expressões numéricas envolvendo adição, subtração e multiplicação

Observe:

$$\left(-1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(+1 - \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{4}{4} - \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$$

Agora dê o resultado:

1) $\left(+3 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{11}{6}$

2) $\left(\frac{1}{7} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) = +1$

3) $(-3) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{10} - 2\right) = -\frac{19}{4}$

4) $\left(-2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(-3 + \frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{6}{13}\right) = -\frac{9}{4}$

5) $\left(-\frac{1}{2}\right) - \left[(-3) + (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = +\frac{3}{2}$

6) $\left(+\frac{2}{3}\right) + \left[\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)\right] = +\frac{11}{30}$

7) $\left(-2 - \frac{1}{3}\right) - \left\{\left[(-3) \cdot (-1) + \left(-\frac{1}{6}\right)\right] \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\right\} = -\frac{4}{9}$

8) $(-3) - \left\{\left[\left(-2 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right] + \left(-\frac{3}{5}\right)\right\} = -\frac{59}{20}$

DIVISÃO

1) $\left(+\frac{2}{3}\right):\left(+\frac{4}{5}\right) = +\frac{5}{6}$

2) $\left(-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{1}{5}\right) = +\frac{5}{4}$

3) $\left(+\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{2}{3}\right) = -1$

4) $\left(-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{4}{5}\right) = +1$

5) $\left(+\frac{3}{8}\right):\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2}$

6) $\left(+\frac{7}{9}\right):\left(+\frac{14}{3}\right) = +\frac{1}{6}$

7) $\left(-\frac{1}{7}\right):\left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{3}{14}$

8) $\left(+\frac{1}{5}\right):\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{15}$

9) $(-3):\left(-\frac{1}{2}\right) = +6$

10) $\left(-\frac{3}{4}\right):(+5) = -\frac{3}{20}$

11) $\left(+\frac{1}{10}\right):\left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{1}{3}$

12) $\left(-\frac{5}{9}\right):\left(-\frac{11}{15}\right) = +\frac{25}{33}$

13) $\left(+\frac{14}{15}\right):\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{7}{3}$

14) $\left(-\frac{6}{7}\right):(+5) = -\frac{6}{35}$

15) $\left(+\frac{1}{2}\right):(+3) = +\frac{1}{6}$

16) $(-19):\left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{38}{3}$

17) $(-15):\left(+8\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{5}$

18) $\left(+7\frac{1}{3}\right):(-4) = -\frac{11}{6}$

Expressões envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(+\frac{2}{5}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(+\frac{2}{5}\right) = +\frac{4}{25}$

2) $\left(-\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{100}{9}$

3) $\left(-\frac{1}{5}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}\right):\left(+\frac{2}{3}\right) = +\frac{9}{80}$

4) $(-9):\left(\frac{3}{8} - \frac{7}{20} - 1\right) = +\frac{120}{13}$

5) $\left(1 + \frac{1}{5} - 2{,}5\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{30}$

6) $\left(-\frac{3}{5}\right):\left(-1 + \frac{2}{3} - 0{,}1\right) = +\frac{18}{13}$

7) $\left(1 - \frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{4}{3}$

8) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{10}\right):\left[\frac{3}{8} - \frac{5}{12} - \left(3 - \frac{1}{2}\right) + 2\right] = -\frac{6}{5}$

9) $\left(-\frac{1}{2}\right):\left[(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = -\frac{3}{8}$

10) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left[\left(-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{1}{8}\right)\right] = -\frac{4}{3}$

11) $\left(-\frac{2}{5}\right):\left[\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 7\right] = +\frac{1}{5}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Efetue:

1) $\left(+\frac{8}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) = -1$

2) $(-8)\cdot\left(+\frac{4}{5}\right) = -\frac{32}{5}$

3) $\left(+\frac{3}{55}\right)\cdot(+15) = +\frac{9}{11}$

4) $(+7)\cdot\left(-\frac{2}{15}\right) = -\frac{14}{15}$

5) $\left(-\frac{6}{11}\right)\cdot(-3) = +\frac{18}{11}$

6) $\left(-\frac{4}{15}\right)\cdot\left(-\frac{12}{28}\right) = +\frac{4}{35}$

7) $\left(+\frac{8}{3}\right):\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{40}{3}$

8) $\left(+\frac{1}{2}\right):\left(+\frac{2}{3}\right) = +\frac{3}{4}$

9) $\left(+3\frac{1}{5}\right):\left(-5\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{5}$

b) Dê o valor das expressões numéricas:

1) $\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right):\left(+\frac{1}{4}\right) = -\frac{8}{21}$

2) $\left(-\frac{2}{5}\right):\left(+\frac{3}{11}\right)\cdot\left(+\frac{1}{3}\right) = -\frac{22}{45}$

3) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right):\left[\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)\right] = +\frac{5}{4}$

4) $\left[\left(-\frac{2}{7}\right):\left(-\frac{1}{14}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right]:\left[(-2)\cdot\left(+\frac{1}{6}\right)\right] = +3$

5) $\left(-\frac{1}{5}\right):\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)-\left[\left(-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]\right\} = +\frac{2}{23}$

POTENCIAÇÃO

1) $\left(+\frac{3}{5}\right)^2 = +\frac{9}{25}$

2) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = +\frac{1}{25}$

3) $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 = +\frac{9}{49}$

4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

5) $\left(+\frac{1}{3}\right)^3 = +\frac{1}{27}$

6) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$

7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$

8) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$

9) $\left(-\frac{1}{10}\right)^3 = -\frac{1}{1000}$

10) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$

11) $\left(+\frac{3}{10}\right)^3 = +\frac{27}{1000}$

12) $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 = +\frac{1}{81}$

13) $\left(+\frac{3}{4}\right)^3 = +\frac{27}{64}$

14) $\left(-\frac{9}{4}\right)^1 = -\frac{9}{4}$

15) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2 = +\frac{1}{36}$

Agora escreva os produtos na forma de potência indicada:

1) $\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

2) $\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)^4$

3) $(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2) = (-0{,}2)^5$

4) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2$

Expressões envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{5} = +\frac{23}{45}$

2) $\left(+\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{3}{20}$

3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3+2 = +\frac{15}{8}$

4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(+\frac{1}{3}\right)^3 = +\frac{13}{27}$

5) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = +\frac{9}{16}$

6) $\left(+\frac{1}{5}\right)^2\cdot(+3) = +\frac{3}{25}$

7) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2:\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = +9$

8) $\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^0 = +\frac{5}{12}$

9) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{2}+4 = +\frac{65}{18}$

10) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2} = +\frac{29}{64}$

11) $\left(+\frac{3}{4}\right)-\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-1\right] = +\frac{23}{12}$

12) $\left[\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{3}{2}\right)^2+2\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

O EXPOENTE NEGATIVO

Como surge o expoente negativo? Como interpretar o expoente negativo?

Para responder a estas perguntas vamos efetuar a divisão: 4 : 64 = ?

Observe:

4	2
2	2
1	

$4 = 2^2$

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$64 = 2^6$

$$4 : 64 = \frac{4}{64} = \frac{2^2}{2^6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^4}$$

$$4 : 64 = 2^2 : 2^6 = 2^{2-6} = 2^{-4}$$

Aplicando a propriedade:

- conserva-se a base;
- subtraem-se os expoentes.

Conclusão:

$$\left.\begin{array}{l} 4 : 64 = \dfrac{1}{2^4} \\ 4 : 64 = 2^{-4} \end{array}\right\} \text{ logo: } \boxed{\frac{1}{2^4} = 2^{-4}}$$

Explicação:

simétricos

$$\frac{1}{2^4} = 2^{-4} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{2}{1}\right)^{-4}$$

inversos

Veja alguns exemplos:

$(+5)^{-2} = \left(+\frac{1}{5}\right)^2$ $\qquad \left(+\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(+\frac{5}{2}\right)^3$ $\qquad \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} = (-5)^2$

$(-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2$ $\qquad \left(-\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(-\frac{4}{3}\right)^4$

Transforme e determine as potências, de acordo com o modelo:

1) $2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

2) $(+6)^{-2} = \left(+\frac{1}{6}\right)^2 = +\frac{1}{36}$

3) $(+2)^{-3} = \left(+\frac{1}{2}\right)^3 = +\frac{1}{8}$

4) $(-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = +\frac{1}{9}$

5) $(-4)^{-3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$

6) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-2} = (+2)^2 = +4$

7) $\left(+\frac{1}{3}\right)^{-3} = (+3)^3 = +27$

8) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = (-4)^2 = +16$

9) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = (-2)^4 = +16$

10) $(-10)^{-2} = \left(-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$

11) $(-10)^{-1} = \left(-\frac{1}{10}\right)^1 = -\frac{1}{10}$

12) $\left(+\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(+\frac{3}{2}\right)^4 = +\frac{81}{16}$

13) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = +\frac{25}{4}$

14) $\left(+\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(+\frac{4}{3}\right)^2 = +\frac{16}{9}$

15) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2} = (-8)^2 = +64$

16) $\left(+\frac{1}{10}\right)^{-3} = (+10)^3 = +1\,000$

17) $(-10)^{-5} = \left(-\frac{1}{10}\right)^5 = -\frac{1}{100\,000}$

18) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = +\frac{16}{25}$

Coloque V nas sentenças verdadeiras e F nas falsas:

1) $(+3) + \left(+\frac{1}{2}\right)^{-2} = +7$ (V)

2) $\left(+\frac{2}{5}\right)^{-1} - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$ (F)

3) $\left(+\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot 2 = +\frac{1}{128}$ (F)

4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(+\frac{4}{3}\right)^{-2} = +\frac{81}{16}$ (V)

5) $\left[\left(+\frac{1}{4}\right)^{2} + \left(+\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{-1} = +\frac{16}{37}$ (V)

6) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(+\frac{4}{3}\right)^{-1} = +3$ (V)

7) $\left(+\frac{3}{5}\right)^{-2} \cdot \left(+\frac{2}{3}\right)^{-1} = +\frac{27}{50}$ (F)

8) $\left(+\frac{3}{2}\right)^{-3} \cdot (+2)^{-3} = +\frac{1}{27}$ (V)

9) $(+2)^{-2} \cdot (+2)^{2} = +1$ (V)

10) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} : (-3)^{2} = +\frac{1}{3}$ (F)

RADICIAÇÃO

1) $\sqrt{+\frac{4}{9}} = +\frac{2}{3}$

2) $\sqrt{+\frac{4}{25}} = +\frac{2}{5}$

3) $\sqrt{+\frac{1}{4}} = +\frac{1}{2}$

4) $\sqrt{+\frac{25}{36}} = +\frac{5}{6}$

5) $\sqrt{+\frac{49}{64}} = +\frac{7}{8}$

6) $-\sqrt{+\frac{25}{36}} = -\left(+\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{6}$

7) $+\sqrt{+\frac{1}{9}} = +\left(+\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{3}$

8) $-\sqrt{+\frac{64}{49}} = -\left(+\frac{8}{7}\right) = -\frac{8}{7}$

9) $+\sqrt{+\frac{1}{100}} = +\left(+\frac{1}{10}\right) = +\frac{1}{10}$

10) $-\sqrt{+\frac{1}{144}} = -\left(+\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{12}$

11) $+\sqrt{+\frac{1}{81}} = +\left(+\frac{1}{9}\right) = +\frac{1}{9}$

12) $-\sqrt{+\frac{121}{100}} = -\left(+\frac{11}{10}\right) = -\frac{11}{10}$

13) $-\sqrt{+\frac{36}{169}} = -\left(+\frac{6}{13}\right) = -\frac{6}{13}$

14) $-\sqrt{+\frac{9}{196}} = -\left(+\frac{3}{14}\right) = -\frac{3}{14}$

15) $+\sqrt{+25} = +(+5) = +5$

16) $-\sqrt{+49} = -(+7) = -7$

17) $-\sqrt{+100} = -(+10) = -10$

18) $-(-\sqrt{+25}) = -(-(+5)) = +5$

19) $-\left(-\sqrt{+\frac{36}{49}}\right) = -\left(-\left(+\frac{6}{7}\right)\right) = +\frac{6}{7}$

20) $-(+\sqrt{+64}) = -(+(+8)) = -8$

21) $\sqrt{-9} =$?

22) $-\sqrt{-16} =$?

23) $+\sqrt{-49} =$?

24) $-\sqrt{-\frac{1}{4}} =$?

25) $-\sqrt{-\frac{25}{36}} =$?

26) $-\sqrt{-(-36)} = -(+6) = -6$

Expressões numéricas envolvendo todas as operações:

1) $\sqrt{+\frac{4}{25}} - \left(+\frac{1}{5}\right)^{2} = +\frac{9}{25}$

2) $\sqrt{+\frac{9}{25}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = +\frac{9}{10}$

3) $\left(+\frac{3}{2}\right)^2 - \sqrt{+\frac{1}{100}} = +\frac{31}{90}$

4) $\sqrt{+\frac{9}{25}} - \left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\right]^0 = -\frac{2}{5}$

5) $\sqrt{+\frac{1}{9}} - \left[\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right] = \frac{19}{24}$

6) $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\sqrt{+\frac{1}{25}}+2\right]^{-1} = +\frac{20}{11}$

7) $\sqrt{+\frac{1}{49}} : (+7)^{-1} = +1$

8) $-\sqrt{+\frac{1}{36}} : (-6)^{-2} = -6$

9) $\sqrt{+64}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] = +1$

10) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} - \sqrt{+16} + \left(-\frac{3}{2}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right) = +14$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Efetue as operações:

1) $\left(-\frac{1}{10}\right)^4 = +\frac{1}{10\,000}$

2) $\left(-\frac{3}{10}\right)^3 = -\frac{27}{1\,000}$

3) $\left(-1\frac{2}{5}\right)^0 = +1$

4) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2} = +\frac{36}{25}$

5) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-1} = -8$

6) $\left(+\frac{7}{10}\right)^3 = +\frac{343}{1000}$

7) $\left(+2\frac{5}{8}\right)^0 = +1$

8) $\left(+\frac{3}{5}\right)^{-1} = +\frac{5}{3}$

9) $(-10)^{-5} = -\frac{1}{100\,000}$

10) $(-100)^{-1} = -\frac{1}{100}$

11) $+\sqrt{+400} = +(+20) = +20$

12) $-\sqrt{-900} =$?

13) $-\sqrt{+900} = -(+30) = -30$

14) $+\sqrt{+324} = +(+18) = +18$

15) $-\sqrt{+\frac{225}{625}} = -\left(+\frac{15}{25}\right) = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5}$

16) $-\sqrt{+\frac{121}{144}} = -\left(+\frac{11}{12}\right) = -\frac{11}{12}$

b) Dê o resultado na forma de potência indicada:

1) $(-10)\cdot(-10)\cdot(-10)\cdot(-10) = (-10)^4$

2) $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^4$

3) $\left(-\frac{12}{17}\right)\cdot\left(-\frac{12}{17}\right) = \left(-\frac{12}{17}\right)^2$

4) $(+0{,}08)\cdot(+0{,}08)\cdot(+0{,}08) = (+0{,}08)^3$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES EM Q

Adição	Subtração	Multiplicação
• Fechamento	• Fechamento	• Fechamento
• Comutativa	• Não é comutativa	• Comutativa
• Elemento neutro	• Não tem elemento neutro	• Elemento neutro
• Elemento simétrico	• Não é associativa	• Associativa
• Associativa		• Distributiva

Divisão	Potenciação	
• Não possui a propriedade fechamento	• Não possui a propriedade fechamento	• Multiplicação de potências de mesma base
• Não é comutativa	• Não é comutativa	• Divisão de potências de mesma base
• Não tem elemento neutro	• Não é associativa	• Potência de potência
• Não é associativa	• Não é distributiva em relação à adição e à subtração	• Distributiva em relação à multiplicação e à divisão
• Distributiva à direita em relação à adição e à subtração		

Radiciação	
• Não possui a propriedade fechamento $\sqrt{-3} = ?$	• Não é distributiva em relação à adição e à subtração $\sqrt{(+9)+(+4)} \neq \sqrt{+9} + \sqrt{+4}$ $\sqrt{(+9)-(+4)} \neq \sqrt{+9} - \sqrt{+4}$
• Não é comutativa $\sqrt[2]{9} \neq \sqrt[9]{2}$	• É distributiva em relação à multiplicação e à divisão $\sqrt{(+9)\cdot(+4)} = \sqrt{+9} \cdot \sqrt{+4}$ $\sqrt{(+9):(+4)} = \sqrt{+9} : \sqrt{+4}$

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Construa uma tabela de dupla entrada da divisão em Q para o conjunto $\{0, -1, -2, -3, -4\}$ e mostre, através de pares de números, que a divisão não apresenta as propriedades comutativa e elemento neutro.

VAMOS EXERCITAR

a) Aplique a propriedade distributiva:

1) $\left(+\frac{1}{5}\right)\left[(+2) + \left(-\frac{1}{4}\right)\right] = \left(+\frac{1}{5}\right)\cdot(+2) + \left(+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$

2) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left[\left(+\frac{2}{5}\right) - (+2)\right] = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(+2)$

3) $(-3)\left[\left(+\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = (-3)\cdot\left(+\frac{1}{6}\right) + (-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

4) $(+4)\left[\left(-\frac{3}{8}\right) - \left(+\frac{1}{6}\right)\right] = (+4)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) - (+4)\cdot\left(+\frac{1}{6}\right)$

5) $\left(-\frac{3}{5}\right)\left[(-4) + (-3)\right] = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot(-4) + \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot(-3)$

6) $\left[(-2) : \left(-\frac{3}{7}\right)\right]^2 = (-2)^2 : \left(-\frac{3}{7}\right)^2$

b) Dê o resultado na forma de potência indicada:

1) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \left(-\frac{2}{5}\right)^9$

2) $\left(+\frac{3}{4}\right)^{10} : \left(+\frac{3}{4}\right)^6 = \left(+\frac{3}{4}\right)^4$

3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$

4) $\left(+\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(+\frac{4}{9}\right)^{-2} = \left(+\frac{4}{9}\right)^0$

5) $\left(+\frac{2}{9}\right)^3 \cdot \left(+\frac{2}{9}\right)^2 \cdot \left(+\frac{2}{9}\right)^{-1} = \left(+\frac{2}{9}\right)^4$

6) $\left(+\frac{4}{5}\right)^3 : \left(+\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(+\frac{4}{5}\right)^6$

7) $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 : \left(-\frac{3}{7}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{7}\right)^6$

8) $\left(+\frac{1}{3}\right)^4 : \left(+\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(+\frac{1}{3}\right)^{-2}$

9) $\left[\left(+\frac{2}{5}\right)^3\right]^{-1} : \left[\left(+\frac{2}{5}\right)^2\right]^{-2} = \left(+\frac{2}{11}\right)^{-2}$

10) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-6}\right]^{-1} = \left(+\frac{4}{13}\right)^2$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Complete o quadro:

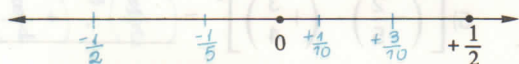
Número	$-\frac{1}{2}$	-40	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{17}{50}$	$-\frac{8}{9}$	$+\frac{8}{10}$	$+\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{100}$	$+\frac{15}{11}$
Simétrico	$+\frac{1}{2}$	$+40$	$-\frac{5}{7}$	$+\frac{17}{50}$	$+\frac{8}{9}$	$-\frac{8}{10}$	$-\frac{1}{7}$	$+\frac{1}{100}$	$-\frac{15}{11}$
Inverso	-2	$-\frac{1}{40}$	$+\frac{7}{5}$	$-\frac{50}{17}$	$-\frac{9}{8}$	$+\frac{10}{8}$	$+7$	-100	$+\frac{11}{15}$
Módulo	$\frac{1}{2}$	40	$\frac{5}{7}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{15}{11}$

Número	-20	-4	$+\frac{19}{7}$	$+\frac{5}{14}$	$-\frac{1}{25}$	-1	$-\frac{21}{45}$	$+2$	$-\frac{3}{100}$
Simétrico	$+20$	$+4$	$-\frac{19}{7}$	$-\frac{5}{14}$	$+\frac{1}{25}$	$+1$	$+\frac{21}{45}$	-2	$+\frac{3}{100}$
Inverso	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{7}{19}$	$+\frac{14}{5}$	-25	-1	$-\frac{45}{21}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{100}{3}$
Módulo	20	4	$\frac{19}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{25}$	1	$\frac{21}{45}$	2	$\frac{3}{100}$

b) Localize na reta numerada:

1) Os pontos imagens dos números:

$+\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, +\frac{3}{10}, -\frac{1}{2}$

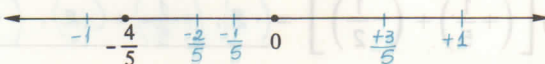
$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{5}$ 0 $+\frac{1}{10}$ $+\frac{3}{10}$ $+\frac{1}{2}$

Os inversos dos números dados são, respectivamente: $+10$, -5, $+\frac{10}{3}$, -2

A ordem crescente dos números dados é:

$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5} < +\frac{1}{10} < +\frac{3}{10}$

2) Os pontos imagens dos números:

$-\frac{1}{5}, +\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, -1, +1$

-1 $-\frac{4}{5}$ $-\frac{2}{5}$ $-\frac{1}{5}$ 0 $+\frac{3}{5}$ $+1$

Os inversos dos números dados são, respectivamente: -5, $+\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{2}$, $+1$, -1

A ordem decrescente dos números dados é:

$+1 > +\frac{3}{5} > -\frac{1}{5} > -\frac{2}{5} > -1$

c) Efetue as operações:

1) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = +\frac{9}{16}$

2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

3) $\left(+1\frac{3}{4}\right)^2 = +\frac{49}{16}$

4) $(+1,1)^2 = +1,21$

5) $(+0,3)^3 = +0,027$

6) $(-0,444\ldots)^2 = +\frac{16}{81}$

7) $(-0,555\ldots)^3 = -\frac{125}{729}$

8) $-\sqrt{+0,04} = -(+0,2) = -0,2$

9) $+\sqrt{+0,0025} = +(+0,05) = +0,05$

10) $-\sqrt{+1,44} = -(+1,2) = -1,2$

11) $-\sqrt{-1,69} = ?$

12) $-\left(-\frac{1}{7}\right)^2 = -\left(+\frac{1}{49}\right) = -\frac{1}{49}$

13) $(-3)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

14) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(-2)\cdot\left(+\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{5}{16}$

15) $(-3)\cdot\left(+4-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{2}$

16) $\left(+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = +\frac{7}{144}$

17) $(-0,5)^2 = +0,25$

18) $\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot(-1)^4 = -\frac{1}{18}$

19) $\left(+\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\cdot(-2)^5 = -\frac{16}{3}$

20) $\left[(-2)\cdot\left(-1-\frac{1}{4}\right)\right]^2 = +\frac{25}{4}$

21) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(-2)-\frac{2}{3}:\left(-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = +\frac{19}{10}$

22) $\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left[-6+2:\left(-1+\frac{1}{2}\right)\right] = +15$

23) $(-2):\left(2-\frac{1}{6}\right)-2:\left[-3-2:\left(-\frac{3}{4}+\frac{2}{8}-2\right)\right] = -\frac{2}{11}$

24) $\left\{+3-\left[+\frac{5}{9}-\left(+\frac{7}{6}-4\right)+\frac{7}{12}\right]\right\}:\left\{+\frac{3}{4}-\left[+\frac{1}{8}+\left(\frac{5}{6}-2\right)-\frac{1}{2}\right]\right\} = -\frac{14}{33}$

25) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2 = +\frac{16}{9}$

26) $(+0,222\ldots)^2 = +\frac{4}{81}$

27) $-(+0,9)^2 = -(+0,81) = -0,81$

d) Aplique a propriedade distributiva:

1) $(-2)\left[\left(+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = (-2)\cdot\left(+\frac{1}{5}\right)+(-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

2) $\left(-\frac{1}{4}\right)\left[(-3)-\left(+\frac{1}{2}\right)\right] = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-3)-\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)$

3) $\left[(-6)+\left(+\frac{1}{8}\right)\right]:(-2) = (-6):(-2)+\left(+\frac{1}{8}\right):(-2)$

4) $\left[(+4)-\left(-\frac{1}{5}\right)\right]:\left(+\frac{2}{3}\right) = (+4):\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{5}\right):\left(+\frac{2}{3}\right)$

5) $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)\right]^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)^2$

6) $\left[(-5):\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^3 = (-5)^3:\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

7) $\sqrt{(+36)\cdot(+25)} = \sqrt{+36}\cdot\sqrt{+25}$

8) $\sqrt{(+64):(+16)} = \sqrt{+64}:\sqrt{+16}$

e) Dê o resultado na forma de potência indicada:

1) $\left[\left(-\frac{2}{7}\right)^2\right]^{-1} = \left(-\frac{2}{7}\right)^{-2}$

2) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^4\right]^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-8}$

3) $\left[\left(+\frac{3}{2}\right)^0\right]^3 = \left(+\frac{3}{2}\right)^0$

4) $\left(+\frac{5}{6}\right)^{-2}\cdot\left(+\frac{5}{6}\right)^{-3} = \left(+\frac{5}{6}\right)^{-5}$

5) $\left(+\frac{5}{6}\right)^{-2}:\left(+\frac{5}{6}\right)^{-3} = \left(+\frac{5}{6}\right)^{1}$

6) $(-5)^6\cdot(-5)^{-8} = (-5)^{-2}$

7) $(-1)^7:(-1)^{10} = (-1)^{-3}$

8) $\left(-\frac{3}{8}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)^{-4}:\left(-\frac{3}{8}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{8}\right)^{1}$

9) $\left(-\frac{5}{9}\right)^5:\left(-\frac{5}{9}\right)^8\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)^3 = \left(-\frac{5}{9}\right)^0$

10) $\left(+\frac{7}{11}\right)^{-2}\cdot\left(+\frac{7}{11}\right)^{-5}:\left(+\frac{7}{11}\right)^{-7} = \left(+\frac{7}{11}\right)^0$

EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

NOÇÃO DE EXPRESSÃO MATEMÁTICA

Qualquer emissão escrita ou falada de um pensamento incompleto é considerada uma expressão.

Veja:

- Amanhã irei. (Esta emissão não exprime um pensamento completo. Logo, é uma **expressão.**)
- $2 + 3$
- $a + b$
- $x + 2$

} expressões matemáticas

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Escreva seis expressões:

1) ______ 2) ______ 3) ______

4) ______ 5) ______ 6) ______

COMPLETANDO O PENSAMENTO SURGE A SENTENÇA

Entende-se por sentença qualquer emissão escrita ou falada de um pensamento completo.

Note:

Expressão: pensamento incompleto	**Sentença:** pensamento completo
Amanhã irei.	Amanhã irei ao cinema.
$2 + 3$ $a + b$ $x + 2$ — expressões matemáticas	$2 + 3 = 5$ $a + b \neq c$ $x + 2 > 8$ — sentenças matemáticas

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Escreva seis sentenças:

1) ______ 2) ______ 3) ______

4) ______ 5) ______ 6) ______

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Marque com E as expressões e com S as sentenças:

1) O jarro está. (E)
2) $x - 8 = 10$ (S)
3) $2 < 5$ (S)
4) $5 - 3$ (E)
5) $3 \neq -3$ (S)
6) A roupa está no varal. (S)
7) 3^2 (E)
8) $5^2 = 25$ (S)
9) $10 : 2$ (E)
10) $2 \cdot (3 + 5) = 16$ (S)
11) $12 : 3 = 4$. (S)
12) $5 : 2 > 2$ (S)
13) O copo contém (E)
14) Cristóvão Colombo descobriu a América. (S)
15) $-4 + 6 = +2$ (S)

b) Dadas as expressões, complete o pensamento da forma que achar conveniente:

1) Eu gosto de estudar.
2) $5 + 3 =$ 8
3) $2^3 =$ 8
4) O vaso contém flores.
5) $3 <$ 5
6) D. Pedro I proclamou a Independência.
7) $3 + 7 \neq$ 8
8) Todo homem é mortal.

AS LINGUAGENS DAS EXPRESSÕES E DAS SENTENÇAS

Costuma-se utilizar dois tipos de linguagem para expressar sentenças e expressões numéricas: a linguagem corrente e a linguagem matemática.

Observe:

- Três mais oito (linguagem corrente)
- $3 + 8$ (linguagem matemática)
- Três mais oito é igual a onze (linguagem corrente)
- $3 + 8 = 11$ (linguagem matemática)

Dê a linguagem matemática e indique se é expressão ou sentença:

1) Dois mais três é diferente de sete.
   Linguagem matemática: $2 + 3 \neq 7$ (sentença)

2) Quatro elevado à 2.ª potência.
   Linguagem matemática: 4^2 (expressão)

3) Cinco mais quatro é maior que seis.
   Linguagem matemática: $5 + 4 > 6$ (sentença)

4) Oito menos três é menor que dez.
   Linguagem matemática: $8 - 3 < 10$ (sentença)

5) Dois ao quadrado é igual a quatro.
   Linguagem matemática: $2^2 = 4$ (sentença)

6) Dois ao cubo é maior que um.
   Linguagem matemática: $2^3 > 1$ (sentença)

7) Raiz quadrada de nove.
   Linguagem matemática: $\sqrt{9}$ (expressão)

8) Dez pertence ao conjunto dos números naturais.
   Linguagem matemática: $10 \in \mathbb{N}$ (sentença)

Dê a linguagem corrente e indique se é expressão ou sentença:

1) $\sqrt{9} = 3$
   Linguagem corrente: Raiz quadrada de nove é igual a três. (sentença)

2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
   Linguagem corrente: Um meio mais um terço. (expressão)

3) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$
   Linguagem corrente: Dois terços não pertence ao conjunto dos números naturais. (sentença)

4) $8 + 1 > 7$

Linguagem corrente: Oito mais um é maior que sete. (sentença)

5) 5^3

Linguagem corrente: Cinco elevado à terceira potência. (expressão)

6) $12 - 5 < 10$

Linguagem corrente: Doze menos cinco é menor que dez. (sentença)

7) $\sqrt{A} = B$

Linguagem corrente: Raiz quadrada de A é igual a B. (sentença)

8) $2^3 - \sqrt{4}$

Linguagem corrente: Dois ao cubo menos raiz quadrada de quatro. (expressão)

9) $6 + 1 \neq 8$

Linguagem corrente: Seis mais um é diferente de oito. (sentença)

10) $5 < 6$

Linguagem corrente: Cinco é menor que seis. (sentença)

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Escreva três expressões e três sentenças em linguagem corrente e em linguagem matemática:

1) ______ 2) ______

3) ______ 4) ______

5) ______ 6) ______

A VERACIDADE OU FALSIDADE DAS SENTENÇAS

O pensamento completo expresso por uma sentença pode ou não traduzir uma verdade.

Veja:

- "Verde, amarelo, azul e branco são as cores da bandeira brasileira." Esta sentença traduz uma verdade. Logo, é uma sentença verdadeira.
- "Marte é um satélite natural da Terra." Esta sentença não traduz uma verdade. Logo, é uma sentença falsa.
- $5 + 7 = 12$ é uma sentença verdadeira.
- $2 + 3 > 8$ é uma sentença falsa.

Marque com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas:

1) A Lua é o satélite natural da Terra. (V)
2) A Princesa Isabel assinou a Lei Áurea. (V)
3) Tiradentes proclamou a Independência. (F)
4) A água potável é a mais saudável das bebidas. (V)
5) $\sqrt{16} = 4$ (V)
6) $3^2 = 9$ (V)
7) $8 + 3 \neq 11$ (F)
8) $5^2 = 2^5$ (F)
9) $\sqrt{4} = 4$ (F)
10) $5 \in \mathbb{N}$ (V)
11) $(2 + 3)^2 = 10$ (F)
12) $12 - 7 < 6$ (V)
13) $5 \cdot 4 = 2 \cdot 10$ (V)
14) $3 - 1 = 4$ (F)
15) $5 + 1 > 4$ (V)

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Escreva as expressões abaixo em linguagem matemática:

1) Dois mais cinco: $2 + 5$

2) Terceira potência de quatro: 4^3

3) Raiz quadrada de nove: $\sqrt{9}$

4) Cinco vezes oito: $5 . 8$

5) Dez quartos: $\frac{10}{4}$

6) Doze menos dois: $12 - 2$

7) Seis ao quadrado: 6^2

8) Dois terços mais um quarto: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

9) Três ao cubo: 3^3

10) Dois vezes um meio: $2 \cdot \frac{1}{2}$

b) Escreva as expressões que seguem em linguagem corrente:

1) $7 + 2$: Sete mais dois

2) $13 - 2$: Treze menos dois

3) $\sqrt{25}$: Raiz quadrada de vinte e cinco

4) 3^4: Três elevado à 4ª potência

5) $6 \cdot 15$: Seis vezes quinze

c) Dê a linguagem matemática das sentenças:

1) Dois elevado à 4.ª potência é igual a dezesseis: $2^4 = 16$

2) Quinze menos seis é menor que vinte: $15 - 6 < 20$

3) Um meio não pertence ao conjunto dos naturais: $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

4) Treze mais zero é maior que um: $13 + 0 > 1$

5) O quadrado da soma de cinco e um é diferente de trinta: $(5+1)^2 \neq 30$

6) O quociente de vinte por quatro é igual a cinco mais zero: $20 : 4 = 5 + 0$

7) A diferença entre dez e o seu inverso é maior que nove: $10 - \frac{1}{10} > 9$

8) Oito é um número natural: $8 \in \mathbb{N}$

d) Escreva as sentenças abaixo em linguagem corrente:

1) $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$: Dois quintos é menor que três quartos.

2) $25 : 5 = 4 + 1$: O quociente de vinte e cinco por cinco é igual a quatro mais um.

3) $(2 + 5)^2 \neq 40$: O quadrado da soma de dois e cinco é diferente de quarenta.

4) $15 \in \mathbb{N}$: Quinze pertence ao conjunto dos números naturais.

5) $5^3 > 15$: Cinco ao cubo é maior que quinze.

6) $0 > -3$: Zero é maior que menos três.

7) $-3 < -1$: Menos três é menor que menos um.

8) $2^4 = 4^2$: Dois elevado à 4ª potência é igual a quatro ao quadrado

e) Coloque V ao lado das sentenças verdadeiras e F ao lado das falsas:

1) A cobra é um animal doméstico. (F)

2) O cão é um animal quadrúpede. (V)

3) Terra e Lua são planetas do sistema solar. (F)

4) $+6 - 6 = 0$ (V)

5) $2 \cdot (5 + 4) \neq 18$ (F)

6) $2^6 = 8^2$ (V)

7) $(18 + 12) : 6 = 18 : 6 + 12 : 6$ (V)

8) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{7}$ (F)

SENTENÇAS ABERTAS E FECHADAS: O SURGIMENTO DAS EQUAÇÕES

Considere as sentenças: "A Terra é o planeta em que vivemos", "Dois mais cinco é igual a dez".

Elas podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas?

Podem. Veja: "A Terra é o planeta em que vivemos" é uma **sentença verdadeira**; "Dois mais cinco é igual a dez" é uma **sentença falsa**.

Sentenças que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas são denominadas **sentenças fechadas**.

Agora observe:

"Amanhã choverá". Uma sentença desse tipo não pode ser classificada nem como verdadeira nem como falsa. Então: Sentenças que não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas são denominadas **sentenças abertas**.

Classifique as sentenças como abertas ou fechadas, de acordo com o modelo:

1) $2 + 3 = 5$ (V) sentença fechada

2) $5^2 < 20$ (F) sentença fechada

3) $(4 + 1)^2 = 10$ (F) sentença fechada

4) $7 + 3 < 8$ (F) sentença fechada

5) $3 \cdot (7 + 4) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 4$ (V) sentença fechada

6) $x + 5 = 10$ (?) sentença aberta

7) $x - 2 < 12$ (?) sentença aberta

8) Ela foi ao cinema. (?) sentença aberta

9) Júpiter é o satélite natural da Terra. (F) sentença fechada

10) $\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} = 5$ (?) sentença aberta

11) $\sqrt{81} > 3^2$ (F) sentença fechada

12) A minhoca é um mamífero. (F) sentença fechada

Quando uma sentença aberta é expressa por uma igualdade ela recebe o nome de **equação**; quando for expressa por uma desigualdade ($<$, $>$ ou $\neq$) recebe o nome de **inequação**.

Observe:

$x + 2 = 3$ é uma sentença aberta, expressa por uma igualdade; logo, é uma **equação**.

$$\left.\begin{array}{l} x - 5 < 8 \\ x + 2 > 10 \\ y + 8 \neq 15 \end{array}\right\}$$ são sentenças abertas, expressas por desigualdades; logo, são **inequações**.

Indique se as sentenças abertas constituem equações ou inequações:

1) $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ equação

2) $x > -3$ inequação

3) $\frac{x-1}{2} < \frac{5}{2}$ inequação

4) $y - 5 = 3 + \frac{1}{3}$ equação

5) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} \neq \frac{5}{6}$ inequação

6) $2 \cdot (x + 3) = 8$ equação

7) $\frac{1}{2} + x > 3 - 5$ inequação

8) $\frac{1}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$ equação

9) $\frac{a}{4} > \frac{2}{4}$ inequação

10) $b + 5 = 10$ equação

OS TERMOS DE UMA EQUAÇÃO: PRIMEIRO E SEGUNDO MEMBROS

Observe a sentença:

$x + 2 = 16 - 1$

Trata-se de uma sentença aberta, expressa por uma igualdade. Então, é uma equação. Essa equação possui dois membros. Veja:

$\underbrace{x + 2}_{1.^{\circ}\text{ membro}} = \underbrace{16 - 1}_{2.^{\circ}\text{ membro}}$

Indique o primeiro e o segundo membros das equações:

1) $y - 5 = 8$

1.º membro: $y - 5$

2.º membro: 8

2) $(a + 1)^2 = 25$

1.º membro: $(a + 1)^2$

2.º membro: 25

3) $\frac{x}{4} - 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

1.º membro: $\frac{x}{4} - 1$

2.º membro: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

4) $b + \frac{1}{2} = 10$

1.º membro: $b + \frac{1}{2}$

2.º membro: 10

5) $3 + \frac{1}{5} = b + 2$

1.º membro: $3 + \frac{1}{5}$

2.º membro: $b + 2$

6) $2xy + 4 = \frac{1}{3} + 1$

1.º membro: $2xy + 4$

2.º membro: $\frac{1}{3} + 1$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete adequadamente:

1) Uma sentença fechada é sempre *verdadeira* ou *falsa.*

2) Quando uma sentença aberta é expressa por uma igualdade, constitui uma *equação*; quando expressa por desigualdade, constitui uma *inequação.*

3) Na equação $x + 3 = 2 + 5$ o primeiro membro é $x + 3$ e o segundo membro é $2 + 5$.

4) Se o primeiro membro de uma equação é $y - 5$ e o segundo membro é $20 : 4 + 2$, então a equação será $y - 5 = 20 : 4 + 2$.

b) Escreva ao lado de cada sentença se ela é aberta ou fechada, e se é equação ou inequação:

1) O ano em que ele nasceu é bissexto. (?) *sentença aberta*

2) $x - 1 = 1$ (?) *sentença aberta : equação*

3) $16 : 4 + 1 = 5$ (V) *sentença fechada*

4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{2}{3}$ (V) *sentença fechada*

5) $y - 2 < 3 + 1$ (?) *sentença aberta : inequação*

6) $3^2 - 1 \neq 8$ (F) *sentença fechada*

7) $2 \cdot (5 + 8) > 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8$ (F) *sentença fechada*

8) $(16 + 12) : 4 = 16 : 4 + 12 : 4$ (V) *sentença fechada*

9) $a - 2 > 5 - 1$ (?) *sentença aberta : inequação*

10) $2x + 5 = 3 - 2$ (?) *sentença aberta : equação*

CONJUNTO UNIVERSO E CONJUNTO VERDADE

Observe a sentença:

"Eles são os planetas do sistema solar que não possuem satélites."

Evidentemente tal sentença é aberta, pois não podemos afirmar se ela é verdadeira ou falsa, visto que não sabemos quem são **eles**.

Então vejamos:

- Quais são os planetas do sistema solar?

É o conjunto formado pelos seguinte planetas:

{Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno, Plutão}

Este conjunto constitui o chamado **conjunto universo** da nossa sentença aberta.

- Por quais planetas podemos substituir a palavra **eles**, para que a sentença se torne verdadeira?

Podemos substituí-la por: Mercúrio e Plutão.

Então, o conjunto {Mercúrio, Plutão} constitui o chamado **conjunto verdade** da nossa sentença aberta.

Conclusão: na sentença "Eles são os planetas do sistema solar que não possuem satélites", o conjunto universo é:

U = {Mercúrio, Vênus, Marte, Terra, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno, Plutão};

o conjunto verdade é:

V = {Mercúrio, Plutão}

Perceba que: $V \subset U$, ou seja, V é subconjunto de U.

Vejamos outra sentença:

"**A** são os Estados brasileiros cujos nomes começam em **a**".

- **conjunto universo**: conjunto formado por todos os Estados brasileiros:

U = {Amazonas, Acre, Pará, Maranhão, . . . , Santa Catarina, Rio Grande do Sul}

- **conjunto verdade**: conjunto formado por todos os Estados brasileiros que tornam a sentença verdadeira:

V = {Acre, Amazonas, Alagoas}

Agora vejamos uma sentença aberta que constitui uma equação:

"x é um número natural que adicionado a cinco dá como resultado oito".

Esta sentença está na linguagem corrente. Vamos passá-la para a linguagem matemática: $x + 5 = 8$.

- **conjunto universo**: conjunto formado por todos os números naturais:

$U = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

- **conjunto verdade**: conjunto formado pelos números naturais que tornam a sentença verdadeira: $\boxed{x} + 5 = 8$ (x → 3)

Então: V = {3}

Indique o conjunto universo e o conjunto verdade das seguintes sentenças:

1) Elas são as cores da bandeira brasileira cujos nomes começam por vogal.

U = { verde, amarelo, azul, branco }

V = { amarelo, azul }

2) Eles são os nomes das estações do ano que começam por consoante.

U = { primavera, verão, outono, inverno }

V = { primavera, verão }

3) Eles são os nomes dos meses do ano que possuem trinta e um dias.

U = {janeiro, fevereiro, ..., dezembro}

V = {janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}

4) x é um número natural que adicionado a dois dá como resultado seis.

U = {0, 1, 2, 3, 4, ...}

V = {4}

Dado o conjunto universo, determine o conjunto verdade das seguintes equações:

1) $x + 4 = 5$
U = {0, 1, 2, 3}
V = { 1 }

2) $y - 3 = 1$
U = {1, 2, 3, 4, 5}
V = { 4 }

3) $x : 2 = 6$
U = {0, 1, 2, 3, 4}
V = { }

4) $x + 1 = 2$
U = {−4, −3, −2, −1, 0}
V = { }

5) $a + 1 = 6$
U = $\mathbb{N}$
V = { 5 }

6) $y \cdot 3 = 21$
U = {0, 1, 2, 3}
V = { }

VARIÁVEL DE UMA EQUAÇÃO: O TERMO DESCONHECIDO

Os termos desconhecidos de uma equação recebem o nome de **variáveis.**

Veja:

$x + 1 = 7$; a variável é x.

$y - 2 = 5$; a variável é y.

$x + 3 = y - 1$; as variáveis são x e y.

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 - \frac{z}{4}$; as variáveis são x, y e z.

Complete os quadros, indicando as variáveis das equações:

Equação	Variáveis
$x - 5 = 3 + 1$	x
$4 - y = 2x + 3$	x e y
$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$	x e y
$3a + b = 8$	a e b
$2y - 7 = y + 6$	y

Equação	Variáveis
$x + \frac{1}{2} = 3 - 2x$	x
$3a + 2b = 5 + c$	a, b e c
$\frac{m}{5} + 1 = \frac{n}{5} - 1$	m e n
$r + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$	r
$r + s = 2r + 6$	r e s

RAÍZES: OS ELEMENTOS DO CONJUNTO VERDADE

Observe a equação:

$x^2 = 9$

Qual será o seu conjunto verdade, no conjunto dos números inteiros?

Para responder isso temos de descobrir quais os números que, ao quadrado, dão como resultado nove. Esses números são −3 e +3.

Veja por quê:

$(x)^2 = 9 \rightarrow (-3)^2 = 9$

$(x)^2 = 9 \rightarrow (+3)^2 = 9$

Então temos: equação: $x^2 = 9$

conjunto universo: U = $\mathbb{Z}$

conjunto verdade: V = {−3, +3}

Todos os elementos do conjunto verdade recebem o nome de **raízes da equação**. Logo, as raízes da equação $x^2 = 9$ são: -3 e $+3$.

COMO RECONHECER SE UM NÚMERO DADO É RAIZ DE UMA EQUAÇÃO?

Basta substituir a variável (letra) pelo número dado:

- se a sentença obtida for verdadeira, o número dado é raiz;
- se a sentença obtida for falsa, o número dado não é raiz.

Vejamos alguns exemplos:

1) Verifique se o número 2 é raiz da equação $x + 3 = 5$.

$$\boxed{x} + 3 = 5 \Longrightarrow 2 + 3 = 5$$

$$5 = 5 \text{ (sentença verdadeira)}$$

Então: 2 é raiz da equação $x + 3 = 5$.

2) Dada a equação $\frac{x}{2} + 3 = x$, verifique se o número 8 é raiz.

$$\frac{\boxed{x}}{2} + 3 = \boxed{x} \Longrightarrow \frac{8}{2} + 3 = 8$$

$$4 + 3 = 8$$

$$7 = 8 \text{ (sentença falsa)}$$

Então: 8 não é raiz da equação $\frac{x}{2} + 3 = x$.

Verifique se os números dados são ou não raízes das respectivas equações:

Bloco 1

Número	Equação
6	$3x - 5 = x + 7$ $3.(6) - 5 = 6 + 7$ $18 - 5 = 13$ $13 = 13$ (V) **Resposta:** 6 é raiz.
$\frac{1}{3}$	$x + \frac{2}{3} = 1$ $\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} = 1$ $\frac{3}{3} = 1$ $1 = 1$ (V) **Resposta:** $\frac{1}{3}$ é raiz.
4	$\frac{x}{2} + 2 = x$ $\frac{(4)}{2} + 2 = (4)$ $2 + 2 = 4$ $4 = 4$ (V) **Resposta:** 4 é raiz.

Bloco 2

Número	Equação
$\frac{2}{3}$	$3x + 5 = 6$ $3.\left(\frac{2}{3}\right) + 5 = 6$ $2 + 5 = 6$ $7 = 6$ (F) **Resposta:** $\frac{2}{3}$ não é raiz.
-2	$x + 6 = 4$ $(-2) + 6 = 4$ $4 = 4$ (V) **Resposta:** -2 é raiz.
$-\frac{1}{5}$	$5a + 1 = 6 - 1$ $5.\left(-\frac{1}{5}\right) + 1 = 6 - 1$ $-1 + 1 = 6 - 1$ $0 = 5$ (F) **Resposta:** $-\frac{1}{5}$ não é raiz.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Dê o conjunto universo e o conjunto verdade das sentenças:

1) Eles são os pontos cardeais cujos nomes terminam em consoante.

U = { norte, sul, leste, oeste }

V = { sul }

2) Eles são os dias da semana cujos nomes começam com a letra **q**.

U = { domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado }

V = { quarta, quinta }

3) **x** é um número natural que adicionado a três dá como resultado dez.

U = { 0, 1, 2, 3, ... }

V = { 7 }

4) **a** é um número inteiro que adicionado a dois dá como resultado zero.

U = { ..., −2, 0, 1, 2, ... }

V = { −2 }

5) **b** é um número inteiro que adicionado a três dá como resultado dois.

U = { ..., −2, −1, 0, 1, 2, ... }

V = { −1 }

b) Verifique se os números são raízes das equações:

Bloco 1

Número	Equação
7	$3x - 1 = 4 \cdot 5$ $3(7) - 1 = 4 \cdot 5$ $21 - 1 = 20$ $20 = 20$ (V) **Resposta:** é raiz.
5	$2x + 6 = 3x + 1$ $2(5) + 6 = 3(5) + 1$ $10 + 6 = 15 + 1$ $16 = 16$ (V) **Resposta:** é raiz.
1	$y - 3 = 3y - 7$ $(1) - 3 = 3(1) - 7$ $1 - 3 = 3 - 7$ $-2 = -4$ (F) **Resposta:** não é raiz.

Bloco 2

Número	Equação
−1	$y + 5 = 2y + 8$ $(-1) + 5 = 2(-1) + 8$ $-1 + 5 = -2 + 8$ $4 = 6$ (F) **Resposta:** não é raiz.
−5	$2x + 6 = x + 1$ $2(-5) + 6 = (-5) + 1$ $-10 + 6 = -5 + 1$ $-4 = -4$ (V) **Resposta:** é raiz.
−3	$a : 1 + 3 = 0$ $(-3) : 1 + 3 = 0$ $-3 + 3 = 0$ $0 = 0$ (V) **Resposta:** é raiz.

Bloco 3

Número	Equação
$\frac{1}{2}$	$4x - 1 = x + \frac{1}{2}$ $4\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$ $2 - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $1 = 1$ (V) **Resposta:** é raiz.
$\frac{2}{5}$	$x + 1 = \frac{3}{5}$ $\left(\frac{2}{5}\right) + 1 = \frac{3}{5}$ $\frac{2}{5} + \frac{5}{5} = \frac{3}{5}$ $\frac{7}{5} = \frac{3}{5}$ (F) **Resposta:** não é raiz.
$-\frac{2}{3}$	$3x + 2 = 0$ $3\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = 0$ $-2 + 2 = 0$ $0 = 0$ (V) **Resposta:** é raiz.

DETERMINAÇÃO DO CONJUNTO VERDADE: A RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO

Como descobrir quais são as raízes de uma equação?

Antes de aprender como se resolve uma equação, você precisa adquirir alguns conhecimentos importantes.

- Princípios de equivalência de uma igualdade

Dada uma sentença verdadeira expressa por uma igualdade, pode-se adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir o mesmo número por ambos os membros da igualdade, pois a mesma continua verdadeira.

Princípio aditivo: adição e subtração	**Princípio multiplicativo: multiplicação e divisão**
$5 - 1 = 2 + 2 \Longrightarrow 5 - 1 \boxed{+3} = 2 + 2 \boxed{+3}$ $4 = 4$ (V) $\quad 4 + 3 = 4 + 3$ $7 = 7$ (V)	$5 - 1 = 2 + 2 \Longrightarrow (5 - 1) \boxed{\cdot 3} = (2 + 2) \boxed{\cdot 3}$ $4 = 4$ (V) $\quad 4 \cdot 3 = 4 \cdot 3$ $12 = 12$ (V)
$5 - 1 = 2 + 2 \Longrightarrow 5 - 1 \boxed{-3} = 2 + 2 \boxed{-3}$ $4 = 4$ (V) $\quad 4 - 3 = 4 - 3$ $1 = 1$ (V)	$5 - 1 = 2 + 2 \Longrightarrow (5 - 1) \boxed{:3} = (2 + 2) \boxed{:3}$ $4 = 4$ (V) $\quad 4 : 3 = 4 : 3$ $\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ (V)

Utilizando o número 4, aplique os princípios aditivo e multiplicativo nas seguintes igualdades:

1) $6 + 2 = 10 - 2 \Longrightarrow 6 + 2 + \underline{4} = 10 - 2 + \underline{4}$ e $6 + 2 - \underline{4} = 10 - 2 - \underline{4}$

$\underline{8} = \underline{8}$ (V) $\quad \underline{8+4} = \underline{8+4} \quad \underline{8-4} = \underline{8-4}$

$\underline{12} = \underline{12}$ (V) $\quad \underline{4} = \underline{4}$ (V)

$(6 + 2) \cdot \underline{4} = (10 - 2) \cdot \underline{4}$ e $(6 + 2) : \underline{4} = (10 - 2) : \underline{4}$

$\underline{8 . 4} = \underline{8 . 4} \quad \underline{8 : 4} = \underline{8 : 4}$

$\underline{32} = \underline{32}$ (V) $\quad \underline{2} = \underline{2}$ (V)

2) $7 + 5 = 9 + 3 \Longrightarrow 7 + 5 + \underline{4} = 9 + 3 + \underline{4}$ e $7 + 5 - \underline{4} = 9 + 3 - \underline{4}$

$\underline{12} = \underline{12}$ (V) $\quad \underline{12+4} = \underline{12+4} \quad \underline{12-4} = \underline{12-4}$

$\underline{16} = \underline{16}$ (V) $\quad \underline{8} = \underline{8}$ (V)

$(7 + 5) \cdot \underline{4} = (9 + 3) \cdot \underline{4}$ e $(7 + 5) : \underline{4} = (9 + 3) : \underline{4}$

$\underline{12 . 4} = \underline{12 . 4} \quad \underline{12 : 4} = \underline{12 : 4}$

$\underline{48} = \underline{48}$ (V) $\quad \underline{3} = \underline{3}$ (V)

- Equações equivalentes

Verifique se o número 3 é raiz das equações:

$x + 5 = 8$	$2x - 4 = 2$	$\frac{x}{3} - 1 = 0$	$2x - 1 = x + 2$
$(3) + 5 = 8$ $8 = 8$ (V)	$2(3) - 4 = 2$ $6 - 4 = 2$ $2 = 2$ (V)	$\frac{(3)}{3} - 1 = 0$ $1 - 1 = 0$ $0 = 0$ (V)	$2(3) - 1 = (3) + 2$ $6 - 1 = 3 + 2$ $5 = 5$ (V)
Resposta: é raiz.	**Resposta:** é raiz.	**Resposta:** é raiz.	**Resposta:** é raiz.

Como você viu, todas as equações acima possuem a mesma raiz, que é o número 3. Então, se o conjunto universo for, por exemplo, $\mathbb{N}$, teremos:

$x + 5 = 8$	$2x - 4 = 2$	$\frac{x}{3} - 1 = 0$	$2x - 1 = x + 2$
$U = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{N}$
$V = \{3\}$	$V = \{3\}$	$V = \{3\}$	$V = \{3\}$

Duas ou mais equações que apresentam o mesmo conjunto verdade, no mesmo conjunto universo, são denominadas **equações equivalentes.**

Considerando o conjunto $\mathbb{Q}$ como conjunto universo, verifique se:

Bloco 1

O número 2 é raiz de:

$x + 3 = 5$ $(2) + 3 = 5$ / $5 = 5$ (V)

Resposta: é raiz.

Logo: $V = \{2\}$

e de

$x = 5 - 3$ $(2) = 5 - 3$ / $2 = 2$ (V)

Resposta: é raiz.

Logo: $V = \{2\}$

Então, as equações $x + 3 = 5$ e $x = 5 - 3$ são equivalentes

Bloco 2

O número $\frac{1}{2}$ é raiz de:

$2x + 4 = 5$ $2\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 5$ / $1 + 4 = 5$ / $5 = 5$ (V)

Resposta: é raiz.

Logo: $V = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

e de

$2x = 1$ $2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ / $1 = 1$ (V)

Resposta: é raiz.

Logo: $V = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Então, as equações $2x + 4 = 5$ e $2x = 1$ são equivalentes.

Bloco 3

O número -4 é raiz de:

$x + 2 = -2$ $(-4) + 2 = -2$ / $-2 = -2$ (V)

Resposta: é raiz

Logo: $V = \{-4\}$

e de

$2x = 8$ $2(-4) = 8$ / $-8 = 8$ (F)

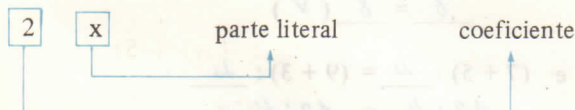
Resposta: não é raiz.

Logo: $V = \{\ ?\ \}$

Então, as equações $x + 2 = -2$ e $2x = 8$ não são equivalentes.

- Termos com variável: as operações

Considere o termo **2x.**

Neste termo, que é um produto indicado, o número 2 que multiplica a variável x recebe o nome de **coeficiente.**

Indique o coeficiente dos seguintes termos:

Bloco 1

Termo	Coeficiente
3x	3
5y	5
4a	4
−2x	−2

Bloco 2

Termo	Coeficiente
$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}y$	$\frac{2}{3}$
$\frac{4x}{5}$	$\frac{4}{5}$
−x	−1

Vejamos agora como se efetuam as operações.

Adição entre termos com a mesma parte literal

Adicionam-se os coeficientes e conserva-se a parte literal.

Veja:

$3x + 2x = ? \Longrightarrow \boxed{3}\,x + \boxed{2}\,x = 5x$

Subtração entre termos com a mesma parte literal

Subtraem-se os coeficientes e conserva-se a parte literal.

$4y - 2y = ? \Longrightarrow \boxed{4}\,y - \boxed{2}\,y = 2y$

Efetue as operações:

Bloco 1

Operação	Soma
2x + 4x	6x
3y + 5y	8y
2x + x	3x
x + x	2x
4a + 3a	7a
a + 2a	3a
6x + 3x	9x
7x + 3x	10x

Bloco 2

Operação	Diferença
3x − x	2x
5y − 3y	2y
2x − x	x
6a − 2a	4a
5x − 4x	x
4y − 3y	y
10a − 5a	5a
x − x	0

Multiplicação entre um termo com variável e um número qualquer

Multiplica-se o coeficiente pelo número e conserva-se a parte literal.

$3x \cdot 2 = ? \Longrightarrow \boxed{3}\,x \cdot \boxed{2} = \boxed{2} \cdot \boxed{3}\,x = 6x$

Divisão entre um termo com variável e um número qualquer diferente de zero

Divide-se o coeficiente pelo número e conserva-se a parte literal.

$4x : 2 = ? \Longrightarrow \boxed{4}\,x\ \boxed{2} = \frac{4x}{2} = 2x$

Efetue as operações:

Bloco 1

Operação	Produto	Operação	Produto
5x · 2	10x	8a · 5	40a
3 · 4x	12x	(−2) · 4x	+8x
2 · 6y	12y	9x · (−1)	−9x
4 · 7y	28y	(−7y) · (−3)	21y

Bloco 2

Operação	Quociente	Operação	Quociente
6x : 2	3x	(−16a) : 8	−2a
8y : 4	2y	$-\frac{30x}{6}$	−5x
$\frac{15x}{3}$	5x	(−40y) : (−5)	8y
$\frac{20y}{5}$	4y	$\frac{35a}{5}$	7a

- Princípios de equivalência de uma equação

Princípio aditivo: adição e subtração	Conseqüência
$x - 4 = 9 \Longrightarrow x - \not{4} + \not{4} = 9 + 4$ $x = 9 + 4$ $x + 4 = 9 \Longrightarrow x + \not{4} - \not{4} = 9 - 4$ $x = 9 - 4$	**Observe:** tudo ocorre como se o número 4 passasse do primeiro para o segundo membro, invertendo-se, entretanto, a operação: $x \boxed{-4} = 9 \Longleftrightarrow x = 9 \boxed{+4}$ $x \boxed{+4} = 9 \Longleftrightarrow x = 9 \boxed{-4}$

Isole a variável no primeiro membro, aplicando o princípio aditivo:

1) $x - 1 = 8 \iff x =$ $8 + 1$
2) $x - 3 = 7 \iff x =$ $7 + 3$
3) $y - 5 = 12 \iff y =$ $12 + 5$
4) $y - 6 = 6 \iff y =$ $6 + 6$
5) $x - 2 = -4 \iff x =$ $-4 + 2$
6) $x + 1 = 3 \iff x =$ $3 - 1$
7) $x + 5 = 6 \iff x =$ $6 - 5$
8) $y + 3 = 3 \iff y =$ $3 - 3$
9) $y + 7 = 2 \iff y =$ $2 - 7$
10) $y + 2 = -5 \iff y =$ $-5 - 2$

Muitas vezes a variável está multiplicada por um número diferente de 1. Através do princípio aditivo pode-se isolar esse produto.

Veja:

$2x + 3 = 5 \Longrightarrow 2x + 3 - 3 = 5 - 3$

$2x = 5 - 3$

Então: $2x \boxed{+3} = 5 \iff 2x = 5 \boxed{-3}$

Isole o produto:

1) $2x + 1 = 5 \iff 2x =$ $5 - 1$
2) $3x + 2 = 11 \iff 3x =$ $11 - 2$
3) $2y + 4 = 12 \iff 2y =$ $12 - 4$
4) $5y + 6 = 21 \iff 5y =$ $21 - 6$
5) $3y + 3 = -9 \iff 3y =$ $-9 - 3$
6) $2x - 1 = 9 \iff 2x =$ $9 + 1$
7) $3x - 4 = 19 \iff 3x =$ $19 + 4$
8) $5y - 2 = 27 \iff 5y =$ $27 + 2$
9) $4y - 5 = 13 \iff 4y =$ $13 + 5$
10) $2x - 3 = -14 \iff 2x =$ $-14 + 3$

Há casos em que a variável aparece nos dois membros. Aplicando o princípio aditivo, pode-se colocá-la no primeiro membro.

Observe:

$3x = 15 - 2x \Longrightarrow 3x + 2x = 15 - 2x + 2x$

$3x + 2x = 15$

Então: $3x = 15 \boxed{-2x} \iff 3x \boxed{+2x} = 15$

Coloque a variável no primeiro membro:

1) $x = 12 - x \iff$ $x + x = 12$
2) $2x = 5 - x \iff$ $2x + x = 5$
3) $2x = 8 - 3x \iff$ $2x + 3x = 8$
4) $x = 2 - 5x \iff$ $x + 5x = 2$
5) $y = 3 - 2y \iff$ $y + 2y = 3$
6) $2y = 4 + y \iff$ $2y - y = 4$
7) $3y = 5 + 2y \iff$ $3y - 2y = 5$
8) $5x = 16 + 3x \iff$ $5x - 3x = 16$
9) $2a = 8 + a \iff$ $2a - a = 8$
10) $4a = -10 + 2a \iff$ $4a - 2a = -10$

Veja mais este caso:

$2x - 4 = 8 + x$

Como colocar a variável no primeiro membro?

$2x - 4 = 8 + x \Longrightarrow 2x - 4 + 4 = 8 + x + 4$

$2x = 8 + x + 4 \Longrightarrow 2x - x = 8 + x + 4 - x$

$2x - x = 8 + 4$

Então: $2x \boxed{-4} = 8 \boxed{+x} \iff 2x \boxed{-x} = 8 \boxed{+4}$

Isole a variável:

1) $2x - 2 = 4 + x \iff$ $2x - x = 4 + 2$
2) $3x - 5 = 10 + 2x \iff$ $3x - 2x = 10 + 5$
3) $4y + 6 = 7 + 3y \iff$ $4y - 3y = 7 - 6$
4) $3y - 8 = 12 + y \iff$ $3y - y = 12 + 8$
5) $6a + 9 = 10 + 3a \iff$ $6a - 3a = 10 - 9$
6) $2x - 5 = 8 - x \iff$ $2x + x = 8 + 5$
7) $5x - 8 = 9 - 3x \iff$ $5x + 3x = 9 + 8$
8) $x - 1 = 1 - x \iff$ $x + x = 1 + 1$
9) $2y + 3 = 15 - y \iff$ $2y + y = 15 - 3$
10) $3y + 4 = 13 - 2y \iff$ $3y + 2y = 13 - 4$

Princípio multiplicativo: multiplicação e divisão	Conseqüência
$\frac{x}{2} = 5 \Longrightarrow \boxed{2} \cdot \frac{x}{2} = \boxed{2} \cdot 5$ $x = 2 \cdot 5$ $2x = 12 \Longrightarrow \frac{2x}{\boxed{2}} = \frac{12}{\boxed{2}}$ $x = \frac{12}{2}$	**Observe:** tudo ocorre como se o número 2 passasse do primeiro para o segundo membro, invertendo-se, no entanto, a operação: $\frac{x}{\boxed{2}} = 5 \Longleftrightarrow x = 5 \cdot 2$ $\boxed{2}x = 12 \Longleftrightarrow x = \frac{12}{2}$

Isole a variável no primeiro membro pela aplicação do princípio multiplicativo:

1) $\frac{x}{3} = 4 \Longleftrightarrow x =$ 4.3
2) $\frac{y}{2} = 6 \Longleftrightarrow y =$ 6.2
3) $\frac{x}{4} = 8 \Longleftrightarrow x =$ 8.4
4) $\frac{y}{5} = 9 \Longleftrightarrow y =$ 9.5
5) $\frac{a}{2} = 7 \Longleftrightarrow a =$ 7.2
6) $2x = 10 \Longleftrightarrow x =$ $\frac{10}{2}$
7) $4y = 24 \Longleftrightarrow y =$ $\frac{24}{4}$
8) $3x = 18 \Longleftrightarrow x =$ $\frac{18}{3}$
9) $2a = 16 \Longleftrightarrow a =$ $\frac{16}{2}$

Observe esta equação: $\frac{2x}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

Vamos aplicar o princípio multiplicativo:

$$\boxed{5\cdot}\frac{2x}{5} - \boxed{5\cdot}\frac{3}{5} = \boxed{5\cdot}\frac{4}{5} \Longleftrightarrow 2x - 3 = 4$$

Então: $\frac{2x}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \Longleftrightarrow 2x - 3 = 4$

Note que, quando todos os termos possuem o mesmo denominador, este pode ser eliminado.

Aplique o princípio multiplicativo:

1) $\frac{4x}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5}{7} \Longleftrightarrow$ $4x - 3 = 5$
2) $\frac{3y}{2} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Longleftrightarrow$ $3y - 1 = 7$
3) $\frac{2a}{3} - \frac{5b}{3} = \frac{5}{3} \Longleftrightarrow$ $2a - 5b = 5$
4) $\frac{4x}{9} + \frac{5}{9} = \frac{x}{9} \Longleftrightarrow$ $4x + 5 = x$
5) $\frac{7y}{8} + \frac{y}{8} = \frac{7}{8} \Longleftrightarrow$ $7y + y = 7$
6) $\frac{6x}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3x}{5} - \frac{4}{5} \Longleftrightarrow$ $6x + 2 = 3x - 4$

Muitas vezes os termos da equação não apresentam o mesmo denominador. Neste caso, é necessário primeiramente reduzir os termos ao mesmo denominador e, a seguir, eliminá-lo.

Veja:

$$\frac{2x}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6} \xrightarrow[\text{m.m.c. }(3, 4, 6) = 12]{\text{redução ao mesmo denominador}} \frac{8x}{12} - \frac{3}{12} = \frac{10}{12} \Longleftrightarrow 8x - 3 = 10$$

EXERCÍCIOS

Elimine os denominadores das equações:

1) $\frac{3x}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{3} \Longleftrightarrow$ $\frac{9x}{12} - \frac{6}{12} = \frac{20}{12}$ $\Longleftrightarrow$ $9x - 6 = 20$

m.m.c. (4, 2, 3) = 12

2) $\frac{4y}{5} - \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \frac{16y}{20} - \frac{12}{20} = \frac{15}{20} \Longleftrightarrow 16y - 12 = 15$

m.m.c. (5, 4) = 20

3) $\frac{x}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \frac{6x}{12} - \frac{10}{12} = \frac{8x}{12} - \frac{3}{12} \Longleftrightarrow 6x - 10 = 8x - 3$

m.m.c. (2, 6, 3, 4) = 12

4) $\frac{x}{3} - \frac{1}{4} = \frac{y}{6} \Longleftrightarrow \frac{4x}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2y}{12} \Longleftrightarrow 4x - 3 = 2y$

m.m.c. (3, 4, 6) = 12

5) $\frac{3a}{8} + \frac{2}{3} = \frac{3a}{4} - \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{9a}{24} + \frac{16}{24} = \frac{18a}{24} - \frac{8}{24} \Longleftrightarrow 9a + 16 = 18a - 8$

m.m.c. (8, 3, 4) = 24

6) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{4} \Longleftrightarrow \frac{6x}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3x}{12} \Longleftrightarrow 6x + 4 = 3x$

m.m.c. (2, 3, 4) = 12

7) $\frac{5y}{6} + \frac{3x}{2} = \frac{5}{12} \Longleftrightarrow \frac{10y}{12} + \frac{18x}{12} = \frac{5}{12} \Longleftrightarrow 10y + 18x = 5$

m.m.c. (6, 2, 12) = 12

8) $\frac{4x}{5} = \frac{5}{6} \Longleftrightarrow \frac{24x}{30} = \frac{25}{30} \Longleftrightarrow 24x = 25$

m.m.c. (5, 6) = 30

9) $\frac{2m}{9} = \frac{4}{5} \Longleftrightarrow \frac{10m}{45} = \frac{36}{45} \Longleftrightarrow 10m = 36$

m.m.c. (9, 5) = 45

Em alguns casos o numerador é uma soma ou uma diferença indicadas.

Observe:

$$\frac{2x+1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x-2}{3} \Longleftrightarrow \frac{6(2x+1)}{12} - \frac{1 \cdot 3}{12} = \frac{4(x-2)}{12}$$

m.m.c. (2, 4, 3) = 12 $\qquad 6(2x+1) - 3 = 4(x-2)$

Elimine os denominadores das equações:

1) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} \Longleftrightarrow \frac{4(x-1)}{12} = \frac{3(y+1)}{12} \Longleftrightarrow 4(x-1) = 3(y+1)$

m.m.c. (3, 4) = 12

2) $\frac{2y+3}{5} - \frac{1}{6} = \frac{3y-2}{3} \Longleftrightarrow \frac{6(2y+3)}{30} - \frac{5}{30} = \frac{10(3y-2)}{30} \Longleftrightarrow 6(2y+3) - 5 = 10(3y-2)$

m.m.c. (5, 6, 3) = 30

3) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} \Longleftrightarrow \frac{3(x+1)}{6} = \frac{2(y-1)}{6} \Longleftrightarrow 3(x+1) = 2(y-1)$

m.m.c. (2, 3) = 6

4) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = \frac{x+3}{4} \Longleftrightarrow \frac{6(x+1)}{12} + \frac{4(x+2)}{12} = \frac{3(x+3)}{12} \Longleftrightarrow 6(x+1) + 4(x+2) = 3(x+3)$

m.m.c. (2, 3, 4) = 12

Propriedade distributiva: a eliminação dos parênteses

Vamos recordar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

$2(3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10$
$3(7 - 2) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 2 = 21 - 6$
$2(2x + 5) = 2 \cdot 2x + 2 \cdot 5 = 4x + 10$

Agora tente resolver o exercício que segue:

Elimine os parênteses aplicando a propriedade distributiva:

Bloco 1

$2(x + y) = 2x + 2y$
$3(x + 2) = 3x + 3.2 = 3x + 6$
$4(y + 3) = 4y + 4.3 = 4y + 12$
$2(2x + 1) = 2.2x + 2.1 = 4x + 2$
$3(2y + 2) = 3.2y + 3.2 = 6y + 6$
$5(3x + 1) = 5.3x + 5.1 = 15x + 5$
$2(4y + 3) = 2.4y + 2.3 = 8y + 6$
$4(3x + 2y) = 4.3x + 4.2y = 12x + 8y$
$6(4a + 5b) = 6.4a + 6.5b = 24a + 30b$
$3(2x + 5) = 3.2x + 3.5 = 6x + 15$

Bloco 2

$3(x - y) = 3x - 3y$
$4(x - 3) = 4x - 4.3 = 4x - 12$
$2(x - 4) = 2x - 2.4 = 2x - 8$
$3(2x - 1) = 3.2x - 3.1 = 6x - 3$
$4(3y - 5) = 4.3y - 4.5 = 12y - 20$
$2(4a - 2) = 2.4a - 2.2 = 8a - 4$
$5(3y - 7) = 5.3y - 5.7 = 15y - 35$
$2(3a - 4b) = 2.3a - 2.4b = 6a - 8b$
$3(4x - 2y) = 3.4x - 3.2y = 12x - 6y$
$6(3x - 4) = 6.3x - 6.4 = 18x - 24$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

O número 3 é raiz de:

$3x - 2 = 7$ $\quad 3(3) - 2 = 7$; $9 - 2 = 7$; $7 = 7$ (V)

Resposta: é raiz.

Logo: V = { 3 }

e de

$3x - 7 = 2$ $\quad 3(3) - 7 = 2$; $9 - 7 = 2$; $2 = 2$ (V)

Resposta: é raiz.

Logo: V = { 3 }

Então, as equações

$3x - 2 = 7$ e $3x - 7 = 2$

são equivalentes.

O número -5 é raiz de:

$x - 3 = -8$ $\quad (-5) - 3 = -8$; $-8 = -8$ (V)

Resposta: é raiz.

Logo: V = { -5 }

e de

$2x - 6 = 16$ $\quad 2(-5) - 6 = 16$; $-10 - 6 = 16$; $-16 = 16$ (F)

Resposta: não é raiz.

Logo: V = { ? }

Então, as equações

$x - 3 = -8$ e $2x - 6 = 16$

não são equivalentes.

O número 0 é raiz de:

$3x + 6 = 6$ $\quad 3(0) + 6 = 6$; $0 + 6 = 6$; $6 = 6$ (V)

Resposta: é raiz.

Logo: V = { 0 }

e de

$x + 2 = 2$ $\quad (0) + 2 = 2$; $2 = 2$ (V)

Resposta: é raiz.

Logo: V = { 0 }

Então, as equações

$3x + 6 = 6$ e $x + 2 = 2$

são equivalentes.

b) Complete os blocos de acordo com as indicações:

Bloco 1

Termo	Coeficiente
$10x$	10
$-12y$	-12
$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{y}{3}$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{a}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{x}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Bloco 2

Adição	Soma
$2x + 2x =$	$4x$
$x + 3x =$	$4x$
$5x + 4x =$	$9x$
$8y + 3y =$	$11y$
$3m + 11m =$	$14m$
$a + a =$	$2a$
$b + b =$	$2b$

Bloco 3

Subtração	Diferença
$8x - 3x =$	$5x$
$5y - 4y =$	y
$3x - 5x =$	$-2x$
$2y - 7y =$	$-5y$
$3m - 3m =$	0
$5a - 6a =$	$-a$
$y - 2y =$	$-y$

Bloco 4

Multiplicação	Produto
$5 \cdot 4x =$	$20x$
$3x \cdot 3 =$	$9x$
$2y \cdot 4 =$	$8y$
$y \cdot 5 =$	$5y$
$3a \cdot (-2) =$	$-6a$

Bloco 5

Divisão	Quociente
$25y : 5 =$	$5y$
$\frac{60m}{5} =$	$12m$
$\frac{50a}{25} =$	$2a$
$(-15x) : (-3) =$	$5x$

c) Complete com o termo que está faltando:

1) $3x + \underline{6x} = 9x$ 2) $2x + 5x + \underline{5x} = 12x$ 3) $15y - \underline{8y} = 7y$

4) $a + \underline{2a} = 3a$ 5) $4m - \underline{4m} = 0$ 6) $\underline{7} \cdot 6x = 42x$

7) $2 \cdot \underline{15x} = 30x$ 8) $14x : \underline{7} = 2x$ 9) $\frac{48y}{6} = 8y$

10) $\frac{54a}{9} = 6a$

d) Elimine os parênteses aplicando a propriedade distributiva:

1) $5(2x - 3y) = \underline{5.2x - 5.3y = 10x - 15y}$

2) $3(4a - 5b) = \underline{3.4a - 3.5b = 12a - 15b}$

3) $7(2y - y) = \underline{7.2y - 7.y = 14y - 7y}$

4) $6(15x - 2) = \underline{6.15x - 6.2 = 90x - 12}$

5) $4(5x - 3) = \underline{4.5x - 4.3 = 20x - 12}$

e) Complete com os termos que estão faltando:

1) $2(7x - \underline{5}) = 14x - 10$ 2) $5(\underline{2x} - \underline{4}) = 10x - 20$

3) $4(2y + \underline{3}) = \underline{8y} + 12$ 4) $3(\underline{4a} + 7) = 12a + \underline{21}$

5) $8(5x - \underline{6}) = \underline{40x} - 48$ 6) $6(\underline{3a} + \underline{5}) = 18a + 30$

O CONJUNTO VERDADE: COMO DETERMINÁ-LO?

Agora que você treinou bastante os princípios de equivalência, as equações equivalentes e a propriedade distributiva, está preparado para começar a resolver uma equação.

Resolver uma equação significa encontrar o seu conjunto verdade num determinado conjunto universo.

Por enquanto, na 6.ª série, você aprenderá a resolver as equações que apresentam apenas uma variável e com expoente unitário. Como você verá, tais equações podem ser transformadas numa equação equivalente na forma $ax + b = 0$, onde **x** é a variável e **a** e **b** são números racionais de modo que $a \neq 0$. Elas são denominadas **equações do 1.º grau com uma variável**.

Vejamos agora quais são os passos que se devem seguir para resolver uma equação:

1.º passo: **eliminação dos denominadores**

Se a equação apresenta denominadores, deve-se eliminá-los pela aplicação do princípio multiplicativo.

2.º passo: **eliminação dos parênteses**

A eliminação dos parênteses, caso existam, é feita aplicando-se a propriedade distributiva.

3.º passo: **isolamento da variável**

Os termos que possuem a variável devem ser colocados num dos membros, no primeiro, por exemplo. Isto é feito aplicando-se o princípio aditivo.

4.º passo: **execução das operações**

Efetuam-se as operações com os termos que possuem a variável, no primeiro membro, e com os números, no segundo membro.

5.º passo: **encontro da raiz**

Dividem-se ambos os membros pelo coeficiente da variável, desde que esse coeficiente seja diferente de zero e um (aplicação do princípio multiplicativo).

VAMOS EXERCITAR

Vamos encontrar o conjunto verdade das equações, considerando o conjunto Q como conjunto universo:

Bloco 1

1) $x - 1 = 0$ $x = 0 + 1 \Rightarrow x = 1$ 1 é a raiz. **Logo:** $V = \{1\}$	2) $x - 4 = 0$ $x = 0 + 4$ $x = 4$ 4 é a raiz. Logo: $V = \{4\}$	3) $y - 5 = 0$ $y = 0 + 5$ $y = 5$ 5 é a raiz. Logo: $V = \{5\}$	4) $y - 3 = 0$ $y = 0 + 3$ $y = 3$ 3 é a raiz. Logo: $V = \{3\}$
Verificação: $x - 1 = 0$ $(1) - 1 = 0$ $0 = 0$ (V)	**Verificação:** $x - 4 = 0$ $(4) - 4 = 0$ $0 = 0$ (V)	**Verificação:** $y - 5 = 0$ $(5) - 5 = 0$ $0 = 0$ (V)	**Verificação:** $y - 3 = 0$ $(3) - 3 = 0$ $0 = 0$ (V)

Bloco 2

1) $x + 1 = 0$ $x = 0 - 1$ $x = -1$ -1 é a raiz. **Logo:** $V = \{-1\}$	2) $x + 7 = 0$ $x = 0 - 7$ $x = -7$ -7 é a raiz. Logo: $V = \{-7\}$	3) $y + 2 = 0$ $y = 0 - 2$ $y = -2$ -2 é a raiz. Logo: $V = \{-2\}$	4) $y + 8 = 0$ $y = 0 - 8$ $y = -8$ -8 é a raiz. Logo: $V = \{-8\}$
Verificação: $x + 1 = 0$ $(-1) + 1 = 0$ $0 = 0$ (V)	**Verificação:** $x + 7 = 0$ $(-7) + 7 = 0$ $0 = 0$ (V)	**Verificação:** $y + 2 = 0$ $(-2) + 2 = 0$ $0 = 0$ (V)	**Verificação:** $y + 8 = 0$ $(-8) + 8 = 0$ $0 = 0$ (V)

Bloco 3

1) $x - 1 = -4$ $x = -4 + 1$ $x = -3$ -3 é a raiz. **Logo:** $V = \{-3\}$	2) $x - 3 = 8$ $x = 8 + 3$ $x = 11$ 11 é a raiz Logo: $V = \{11\}$	3) $y - 2 = -9$ $y = -9 + 2$ $y = -7$ -7 é a raiz Logo: $V = \{-7\}$	4) $y - 4 = -2$ $y = -2 + 4$ $y = 2$ 2 é a raiz Logo: $V = \{2\}$
Verificação: $x - 1 = -4$ $(-3) - 1 = -4$ $-4 = -4$ (V)	**Verificação:** $x - 3 = 8$ $(11) - 3 = 8$ $8 = 8$ (V)	**Verificação:** $y - 2 = -9$ $(-7) - 2 = -9$ $-9 = -9$ (V)	**Verificação:** $y - 4 = -2$ $(2) - 4 = -2$ $-2 = -2$ (V)

Bloco 4

1) $3x = 12$ $x = \frac{12}{3}$ $x = 4$ 4 é a raiz. **Logo:** $V = \{4\}$	2) $5x = 30$ $x = \frac{30}{5}$ $x = 6$ 6 é a raiz Logo: $V = \{6\}$	3) $4a = 36$ $a = \frac{36}{4}$ $a = 9$ 9 é a raiz Logo: $V = \{9\}$	4) $2y = 16$ $y = -\frac{16}{2}$ $y = -8$ -8 é a raiz Logo: $V = \{-8\}$
Verificação: $3x = 12$ $3(4) = 12$ $12 = 12$ (V)	**Verificação:** $5x = 30$ $5(6) = 30$ $30 = 30$ (V)	**Verificação:** $4a = 36$ $4(9) = 36$ $36 = 36$ (V)	**Verificação:** $2y = -16$ $2(-8) = -16$ $-16 = -16$ (V)

Bloco 5

1) $-2x = -4 \quad (-1)$ $2x = 4$ $x = \frac{4}{2}$ $x = 2$ 2 é a raiz. **Logo:** $V = \{2\}$	2) $-3x = -9 \quad (-1)$ $3x = 9$ $x = \frac{9}{3}$ $x = 3$ 3 é a raiz Logo: $V = \{3\}$	3) $-5y = 20 \quad (-1)$ $5y = -20$ $y = -\frac{20}{5}$ $y = -4$ -4 é a raiz Logo: $V = \{-4\}$	4) $-2a = 10 \quad (-1)$ $2a = -10$ $a = -\frac{10}{2}$ $a = -5$ -5 é a raiz Logo: $V = \{-5\}$
Verificação: $-2x = -4$ $-2(2) = -4$ $-4 = -4$ (V)	**Verificação:** $-3x = -9$ $-3(3) = -9$ $-9 = -9$ (V)	**Verificação:** $-5y = 20$ $-5(-4) = 20$ $20 = 20$ (V)	**Verificação:** $-2a = 10$ $-2(-5) = 10$ $10 = 10$ (V)

Bloco 6

1) $2x - 1 = 0$ $2x = 0 + 1$ $2x = 1$ $x = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ é a raiz. **Logo:** $V = \left\{\frac{1}{2}\right\}$	2) $3x - 6 = 0$ $3x = 0 + 6$ $3x = 6$ $x = \frac{6}{3}$ $x = 2$ 2 é a raiz. Logo: $V = \{2\}$	3) $2y - 10 = 0$ $2y = 0 + 10$ $2y = 10$ $y = \frac{10}{2}$ $y = 5$ 5 é a raiz Logo: $V = \{5\}$	4) $4a - 2 = 0$ $4a = 0 + 2$ $4a = 2$ $a = \frac{2}{4}$ $a = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ é a raiz Logo: $V = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
Verificação: $2x - 1 = 0$ $2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$ $1 - 1 = 0$ $0 = 0$ (V)	**Verificação:** $3x - 6 = 0$ $3(2) - 6 = 0$ $6 - 6 = 0$ $0 = 0$ (V)	**Verificação:** $2y - 10 = 0$ $2(5) - 10 = 0$ $10 - 10 = 0$ $0 = 0$ (V)	**Verificação:** $4a - 2 = 0$ $4\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$ $2 - 2 = 0$ $0 = 0$ (V)

Bloco 7

1) $3x + 1 = 7$ $3x = 7 - 1$ $3x = 6$ $x = \frac{6}{3}$ $x = 2$ 2 é a raiz. **Logo:** $V = \{2\}$	2) $2x + 3 = 9$ $2x = 9 - 3$ $2x = 6$ $x = \frac{6}{2}$ $x = 3$ 3 é a raiz. Logo: $V = \{3\}$	3) $4y - 5 = -1$ $4y = -1 + 5$ $4y = 4$ $y = \frac{4}{4}$ $y = 1$ 1 é a raiz. Logo: $V = \{1\}$	4) $3m + 1 = 13$ $3m = 13 - 1$ $3m = 12$ $m = \frac{12}{3}$ $m = 4$ 4 é a raiz. Logo: $V = \{4\}$
Verificação: $3x + 1 = 7$ $3(2) + 1 = 7$ $6 + 1 = 7$ $7 = 7$ (V)	**Verificação:** $2x + 3 = 9$ $2(3) + 3 = 9$ $6 + 3 = 9$ $9 = 9$ (V)	**Verificação:** $4y - 5 = -1$ $4(1) - 5 = -1$ $4 - 5 = -1$ $-1 = -1$ (V)	**Verificação:** $3m + 1 = 13$ $3(4) + 1 = 13$ $12 + 1 = 13$ $13 = 13$ (V)

Bloco 8

1) $8 - 2x = -4$ $-2x = -4 - 8$ $-2x = -12 \ (-1)$ $2x = 12$ $x = \frac{12}{2}$ $x = 6$ 6 é a raiz. **Logo:** $V = \{6\}$	2) $5 - 3x = -1$ $-3x = -1 - 5$ $-3x = -6 \ (-1)$ $3x = 6$ $x = \frac{6}{3}$ $x = 2$ 2 é a raiz. Logo: $V = \{2\}$	3) $2 - x = 1$ $-x = 1 - 2$ $-x = -1 \ (-1)$ $x = 1$ 1 é a raiz. Logo: $V = \{1\}$	4) $3 - 4y = -5$ $-4y = -5 - 3$ $-4y = -8 \ (-1)$ $4y = 8$ $y = \frac{8}{4}$ $y = 2$ 2 é a raiz. Logo: $V = \{2\}$

Bloco 9

1) $5 = 8 - 3x$ $3x = 8 - 5$ $3x = 3$ $x = \frac{3}{3}$ $x = 1$ 1 é a raiz. **Logo:** $V = \{1\}$	2) $3 = 7 - 2x$ $2x = 7 - 3$ $2x = 4$ $x = \frac{4}{2}$ $x = 2$ 2 é a raiz. Logo: $V = \{2\}$	3) $-13 = 2 - 5y$ $5y = 2 + 13$ $5y = 15$ $y = \frac{15}{5}$ $y = 3$ 3 é a raiz. Logo: $V = \{3\}$	4) $-2 = -12 + 2y$ $-2y = -12 + 2$ $-2y = -10 \ (-1)$ $2y = 10$ $y = \frac{10}{2}$ $y = 5$ 5 é a raiz. Logo: $V = \{5\}$

Bloco 10

1) $x + 2 = 8 - x$ $x + x = 8 - 2$ $2x = 6$ $x = \frac{6}{2}$ $x = 3$ 3 é a raiz. **Logo:** $V = \{3\}$	2) $2x + 1 = 13 - 2x$ $2x + 2x = 13 - 1$ $4x = 12$ $x = \frac{12}{4}$ $x = 3$ 3 é a raiz. Logo: $V = \{3\}$	3) $3y - 2 = 12 + y$ $3y - y = 12 + 2$ $2y = 14$ $y = \frac{14}{2}$ $y = 7$ 7 é a raiz. Logo: $V = \{7\}$	4) $y - 5 = -1 - 3y$ $y + 3y = -1 + 5$ $4y = 4$ $y = \frac{4}{4}$ $y = 1$ 1 é a raiz. Logo: $V = \{1\}$

Bloco 11

1) $2(x+1)=12$
$2x+2=12$
$2x=12-2$
$2x=10$
$x=\frac{10}{2} \Rightarrow x=5$
5 é a raiz.
Logo: $V=\{5\}$

2) $3(2x-4)=6$
$6x-12=6$
$6x=6+12$
$6x=18$
$x=\frac{18}{6}$
$x=3$
3 é a raiz.
Logo: $V=\{3\}$

3) $2(y-3)=0$
$2y-6=0$
$2y=0+6$
$2y=6$
$y=\frac{6}{2}$
$y=3$
3 é a raiz.
Logo: $V=\{3\}$

4) $4(2y-5)=-4$
$8y-20=-4$
$8y=-4+20$
$8y=16$
$y=\frac{16}{8}$
$y=2$
2 é a raiz.
Logo: $V=\{2\}$

Bloco 12

1) $4(3x-1)=2(2x+8)$
$12x-4=4x+16$
$12x-4x=16+4$
$8x=20$
$x=\frac{20}{8}$
$x=\frac{5}{2}$
$\frac{5}{2}$ é a raiz.
Logo: $V=\left\{\frac{5}{2}\right\}$

2) $2(x-3)=3(x+4)$
$2x-6=3x+12$
$2x-3x=12+6$
$-x=18\ (-1)$
$x=-18$
-18 é a raiz.
Logo: $V=\{-18\}$

3) $3(2y+4)+2(y-10)=0$
$6y+12+2y-20=0$
$6y+2y=0-12+20$
$8y=8$
$y=\frac{8}{8}$
$y=1$
1 é a raiz.
Logo: $V=\{1\}$

Bloco 13

1) $5-2(x-4)=-1$
$5-2x+8=-1$
$-2x=-1-5-8$
$-2x=-14\quad(-1)$
$2x=14$
$x=\frac{14}{2}$
$x=7$
7 é a raiz.
Logo: $V=\{7\}$

2) $3-5(y-3)=28$
$3-5y+15=28$
$-5y=28-3-15$
$-5y=10\ (-1)$
$5y=-10$
$y=\frac{-10}{5}$
$y=-2$
-2 é a raiz.
Logo: $V=\{-2\}$

3) $y-2(2y+3)=0$
$y-4y-6=0$
$y-4y=0+6$
$-3y=6\ (-1)$
$3y=-6$
$y=-\frac{6}{3}$
$y=-2$
-2 é a raiz.
Logo: $V=\{-2\}$

Bloco 14

1) $\frac{x}{2}=5$
$x=5\cdot 2$
$x=10$
10 é a raiz.
Logo: $V=\{10\}$

2) $\frac{3y}{4}=6$
$3y=6.4$
$3y=24$
$y=\frac{24}{3}$
$y=8$
8 é a raiz. Logo: $V=\{8\}$

3) $\frac{2x}{3}=-8$
$2x=-8.3$
$2x=-24$
$x=\frac{-24}{2}$
$x=-12$
-12 é a raiz. Logo: $V=\{-12\}$

4) $\frac{5a}{2}=10$
$5a=10.2$
$5a=20$
$a=\frac{20}{5}$
$a=4$
4 é a raiz. Logo: $V=\{4\}$

Bloco 15

1) $\frac{x}{3}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$
$x+2=5$
$x=5-2$
$x=3$
3 é a raiz.
Logo: $V=\{3\}$

2) $\frac{2x}{5}-\frac{1}{5}=\frac{7}{5}$
$2x-1=7$
$2x=7+1$
$2x=8$
$x=\frac{8}{2}$
$x=4$
4 é a raiz. Logo: $V=\{4\}$

3) $\frac{y}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$
$y+3=5$
$y=5-3$
$y=2$
2 é a raiz.
Logo: $V=\{2\}$

Bloco 16

1) $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} = 2$

m.m.c. (2, 3) = 6

$\frac{3x}{6} - \frac{4}{6} = \frac{12}{6}$

$3x - 4 = 12$

$3x = 12 + 4$

$3x = 16$

$x = \frac{16}{3}$

$\frac{16}{3}$ é a raiz.

Logo: $V = \left\{ \frac{16}{3} \right\}$

2) $\frac{2x}{5} - \frac{3}{4} = \frac{9}{10}$

m.m.c.(5, 4, 10) = 20

$\frac{8x}{20} - \frac{15}{20} = \frac{18}{20}$

$8x - 15 = 18$

$8x = 18 + 15$

$8x = 33$

$x = \frac{33}{8}$

$\frac{33}{8}$ é a raiz.

Logo: $V = \left\{ \frac{33}{8} \right\}$

3) $\frac{3y}{4} - \frac{1}{3} = \frac{y}{6}$

m.m.c (4, 3, 6) = 12

$\frac{9y}{12} - \frac{4}{12} = \frac{2y}{12}$

$9y - 4 = 2y$

$9y - 2y = 4$

$7y = 4$

$y = \frac{4}{7}$

$\frac{4}{7}$ é a raiz

Logo: $V = \left\{ \frac{4}{7} \right\}$

Bloco 17

1) $\frac{x+1}{2} = \frac{x-2}{3}$

m.m.c. (2, 3) = 6

$\frac{3(x+1)}{6} = \frac{2(x-2)}{6}$

$3(x+1) = 2(x-2)$

$3x + 3 = 2x - 4$

$3x - 2x = -4 - 3$

$x = -7$

-7 é a raiz.

Logo: $V = \{-7\}$

2) $\frac{2x-3}{4} + \frac{x+1}{3} = \frac{5}{12}$

m.m.c(4, 3, 12) = 12

$\frac{3(2x-3)}{12} + \frac{4(x+1)}{12} = \frac{5}{12}$

$3(2x-3) + 4(x+1) = 5$

$6x - 9 + 4x + 4 = 5$

$6x + 4x = 5 + 9 - 4$

$10x = 10$

$x = \frac{10}{10} \Rightarrow x = 1$

1 é a raiz. Logo: $V = \{1\}$

3) $\frac{y+4}{3} - \frac{2y-1}{5} = \frac{8}{15}$

m.m.c(3, 5, 15) = 15

$\frac{5(y+4)}{15} - \frac{3(2y-1)}{15} = \frac{8}{15}$

$5(y+4) - 3(2y-1) = 8$

$5y + 20 - 6y + 3 = 8$

$5y - 6y = 8 - 20 - 3$

$-y = -15 \ (-1)$

$y = 15$

15 é a raiz. Logo: $V = \{15\}$

Bloco 18: caso especial: $0x = a \ (a \neq 0)$

1) $3(2x - 4) = 2(3x - 1)$

$6x - 12 = 6x - 2$

$6x - 6x = -2 + 12$

$0 \boxed{x} = 10$

Não há número que multiplicado por zero resulte 10.

Esta equação não tem raiz.

Logo: $V = \emptyset$

2) $4(3y - 2) - 5 = 6(2y + 7)$

$12y - 8 - 5 = 12y + 42$

$12y - 12y = 42 + 8 + 5$

$0 \boxed{y} = 55$

Não há número que multiplicado por zero resulte 55.

Esta equação não tem raiz.

Logo: $V = \emptyset$

3) $6a + 8 - a = 3a + 15 + 2a$

$6a - a - 3a - 2a = 15 - 8$

$0 \boxed{a} = 7$

Não há número que multiplicado por zero resulte 7.

Esta equação não tem raiz.

Logo: $V = \emptyset$

Bloco 19: caso especial: $0x = 0$

1) $2x - 1 - 2 = 2x - 3$

$2x - 2x = -3 + 1 + 2$

$0 \boxed{x} = 0$

Qualquer número multiplicado por zero resulta zero.

Qualquer número racional é raiz desta equação.

Logo: $V = \mathbb{Q}$

2) $5(2x - 4) + 7 = 10x - 13$

$10x - 20 + 7 = 10x - 13$

$10x - 10x = -13 + 20 - 7$

$0 \boxed{x} = 0$

Qualquer número multiplicado por zero resulta zero.

Qualquer número racional é raiz desta equação.

Logo: $V = \mathbb{Q}$

3) $\frac{x}{2} = \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}$

$x = x - 1 + 1$

$x - x = -1 + 1$

$0 \boxed{x} = 0$

Qualquer número multiplicado por zero resulta zero.

Qualquer número racional é raiz desta equação.

Logo: $V = \mathbb{Q}$

Bloco 20: O conjunto verdade depende do conjunto universo.

1) Seja U = IN (naturais)	2) Seja U = $\mathbb{Z}$ (inteiros)	3) Seja U = IN	4) Seja U = IN
$3(x-1) = x-2$ $3x-3 = x-2$ $3x-x = -2+3$ $2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ Esta equação não tem raiz em IN. **Logo:** $V = \phi$	$4y-3 = y-1$ $4y-y = -1+3$ $3y = 2$ $y = \frac{2}{3}$ Esta equação não tem raiz em $\mathbb{Z}$. Logo: $V = \emptyset$	$2(2x+1) = -2$ $4x+2 = -2$ $4x = -2-2$ $4x = -4$ $x = -\frac{4}{4}$ $x = -1$ Esta equação não tem raiz em IN. Logo: $V = \emptyset$	$2(x-3) = 4$ $2x-6 = 4$ $2x = 4+6$ $2x = 10$ $x = \frac{10}{2}$ $x = 5$ 5 (número natural) é raiz desta equação. Logo: $V = \{5\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Descubra a raiz das equações e faça a verificação:

1) $x-5 = 1$ (6)
2) $2x-2 = 2$ (2)
3) $3x-1 = x+9$ (5)
4) $5-x = x-3$ (4)
5) $\frac{x}{3} = 6$ (18)
6) $\frac{2x}{5} = 4$ (10)
7) $\frac{y}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ (7)
8) $\frac{y}{2} + \frac{3}{4} = \frac{y}{3} - \frac{1}{6}$ $\left(-\frac{11}{2}\right)$
9) $\frac{x-1}{3} - 2 = \frac{x-2}{4}$ (22)
10) $2(x-3) - 4(x-1) = 8$ (−5)
11) $\frac{y-1}{2} = 4$ (9)
12) $-3x = -10+1$ (3)
13) $5(x-1) = 15$ (4)
14) $2(y-2) + 3(y-1) = 3$ (2)
15) $\frac{x}{2} + 1 = x$ (2)
16) $3x - \frac{x-1}{2} = 3$ (1)
17) $5y-6 = 4y+4$ (10)
18) $\frac{x+1}{2} - 3 = \frac{x-1}{3}$ (13)

b) Determine o conjunto verdade das equações, sendo U = IN:

1) $2x+1 = 3x-2$ $\{3\}$
2) $3(x-1) = 6$ $\{3\}$
3) $2y+5 = y+4$ $\{\ \}$
4) $\frac{x}{2} + \frac{3}{4} = 1$ $\{\ \}$
5) $\frac{3y}{2} = 2$ $\{\ \}$
6) $\frac{m+2}{3} = 1$ $\{1\}$
7) $2m-8 = 2(m-4)$ IN
8) $m+5 = m+7$ $\{\ \}$
9) $1 - \frac{2x-1}{2} = x$ $\{\ \}$
10) $3x+6 = 0$ $\{\ \}$

c) Encontre o conjunto verdade, em U = $\mathbb{Z}$, das equações:

1) $2x = -16$ $\{-8\}$
2) $3x+15 = 0$ $\{-5\}$
3) $6+4y = 5y-1$ $\{7\}$
4) $2x - 4(x-1) = 1$ $\{\ \}$
5) $\frac{2y}{3} + 1 = y + \frac{1}{3}$ $\{2\}$
6) $2(3y-1) = 3(2y+1)$ $\{\ \}$
7) $3y + 2(y+4) = 18$ $\{2\}$
8) $2(x+3) = 2x+6$ $\mathbb{Z}$
9) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{5}{6}$ $\{\ \}$

d) No conjunto U = $\mathbb{Q}$, determine o conjunto verdade das equações:

1) $3x = 16-x$ $\{4\}$
2) $\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$ $\{3\}$
3) $3x+8 = 1 + \frac{2x}{3}$ $\{-3\}$
4) $3y - 2(3y+4) = -5$ $\{-1\}$
5) $\frac{y+5}{2} = \frac{y+4}{5}$ $\left\{-\frac{17}{3}\right\}$
6) $2(2+2x) - 8x = 1$ $\left\{\frac{3}{4}\right\}$
7) $\frac{x}{2} + \frac{4x-1}{3} = \frac{x+1}{2}$ $\left\{\frac{5}{8}\right\}$
8) $7(x-5) = 7x+5$ $\{\ \}$
9) $\frac{2(3x+2)}{3} = 4$ $\left\{\frac{4}{3}\right\}$
10) $2(x-1) = 2x-5+3$ $\mathbb{Q}$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Indique com **E** as expressões e com **S** as sentenças:

1) Três menos um (E)

2) $-4 \in \mathbb{Z}$ (S)

3) $4 + 5 = 9$ (S)

4) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ (E)

5) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} \neq \frac{5}{6}$ (S)

6) Meus livros estão na estante. (S)

b) Classifique as sentenças como abertas ou fechadas:

1) Eles são afluentes do rio Amazonas. (?) sentença aberta

2) $\sqrt{4} - \sqrt{9} = -1$ (V) sentença fechada

3) Eles são animais selvagens. (?) sentença aberta

4) $2x - 1 = 0$ (?) sentença aberta

5) $3 - \sqrt{9} = -6$ (F) sentença fechada

c) Coloque **E** se for equação e **I** se for inequação:

1) $3x - 5 = 7$ (E)

2) $x < -8$ (I)

3) $\frac{x}{2} = 11$ (E)

4) $2y - 1 > 0$ (I)

5) $x - 1 \neq x$ (I)

6) $4(m - 1) = 3m - 2$ (E)

d) Determine as raízes das equações:

1) $y - 5 = 5 - y$ (5)

2) $y - 3 = 6 - 2y$ (3)

3) $3x - 5 + 5x - 19 = 0$ (3)

4) $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 1$ $\left(\frac{12}{7}\right)$

5) $\frac{3y}{4} - 2y = -1$ $\left(\frac{4}{5}\right)$

6) $2(x - 2) - 5 = 2(2 - x)$ $\left(\frac{13}{4}\right)$

7) $\frac{2x - 1}{3} - x = \frac{3x - 2}{4} + x$ $\left(\frac{2}{25}\right)$

8) $3(x - 3) - 3(3 - x) = 0$ (3)

e) Considerando $\mathbb{Q}$ como conjunto universo, determine o conjunto verdade das equações:

1) $3y - 2 = 2 - 3y$ $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

2) $2x - 3 = 3x - 2$ $\{-1\}$

3) $2(y - 1) + 3(y - 2) = 4(y - 3)$ $\{-4\}$

4) $\frac{x - 1}{2} = \frac{1 - x}{3}$ $\{1\}$

5) $y - 2(y - 1) = 3(y - 2)$ $\{2\}$

6) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{x}{12} = 1$ $\{-6\}$

7) $4(3x - 2) - 3(4x + 3) = 0$ $\emptyset$

8) $5(4y - 3) - 10(2y - 2) = 5$ $\mathbb{Q}$

9) $\frac{x - 1}{2} + \frac{x - 2}{3} = \frac{x - 4}{5}$ $\left\{\frac{11}{19}\right\}$

10) $4y - 3(2y - 7) = 21$ $\{0\}$

f) Testes:

1) A raiz da equação $4x - 8 = 2x - (-x) - (-1)$ é:

a. ( ) negativa b. ( ) inteira e negativa c. (X) 9 d. ( ) {9}

2) A raiz da equação $6x + 12x - 15 + x - 3 = x + 9$ é:

a. ( ) $\frac{2}{3}$ b. (X) $\frac{3}{2}$ c. ( ) 15 d. ( ) $-\frac{2}{3}$

3) O valor de $y \in \mathbb{N}$ que satisfaz a igualdade $2(3y - 5) - 10 = y + 3(4y - 6)$ é:

a. ( ) -2 b. ( ) $-\frac{2}{7}$ c. ( ) $+2$ d. (X) inexistente

4) O valor de **x** que satisfaz a igualdade $3x - 4 = -2(x + 2) + 5x$ é:

a. ( ) nenhum b. ( ) 0 c. ( ) 1 d. (X) qualquer

5) Em $U = \mathbb{Q}$, o conjunto verdade da equação $6 - 2x + 2 = 8(x + 1) - 3(5 - 2x)$ é:

a. (X) $\left\{\frac{15}{16}\right\}$ b. ( ) { } c. ( ) $\left\{\frac{16}{15}\right\}$ d. ( ) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

6) Em $U = \mathbb{Q}$, o conjunto verdade da equação: $\frac{x + 2}{4} - x = x + \frac{x + 1}{6}$ é:

a. (X) $\left\{\frac{4}{23}\right\}$ b. ( ) $\left\{\frac{1}{7}\right\}$ c. ( ) $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ d. ( ) {7}

7) A equação $\frac{3y - 1}{2} = 4 + \frac{y - 3}{4}$ tem raiz:

a. (X) 3 b. ( ) $\frac{5}{3}$ c. ( ) 4 d. ( ) 5

8) Assinale a alternativa que corresponde a uma sentença fechada:

a. ( ) $1 - x = x + 1$ c. ( ) $2(x - 3) > 0$

b. (X) A Terra é o satélite natural da Lua. d. ( ) $3(x - 1) < 0$

9) A raiz da equação $\frac{x - 1}{4} = 5 + \frac{2x - 3}{2}$ é:

a. (X) -5 b. ( ) 5 c. ( ) $\frac{3}{4}$ d. ( ) $-\frac{3}{4}$

10) Em $U = \mathbb{Z}$, o conjunto verdade da equação $\frac{2x - 1}{4} + \frac{x}{3} = 4$ é:

a. (X) {51} b. ( ) {5,1} c. ( ) {21} d. ( ) ϕ

11) Associe as equações da coluna I com as respectivas raízes da coluna II:

Coluna I	**Coluna II**
1. $2x + 6 = x + 8$	(4) 6
2. $3(x - 1) - 2(x + 1) = 3$	(3) 1
3. $\frac{3x - 3}{4} - \frac{x - 1}{2} = 0$	(5) 3
4. $\frac{3x - 1}{6} - \frac{x}{12} = \frac{x + 1}{3}$	(2) 8
5. $\frac{x - 3}{2} + \frac{x - 3}{3} = 0$	(1) 2

Você obteve na coluna II de cima para baixo o numeral:

a. ( ) 43512 b. ( ) 52143 c. (X) 43521 d. ( ) 31452

12) A raiz da equação $\frac{3x - 5}{8} - \frac{x + 1}{5} = \frac{2x - 3}{10}$ é:

a. ( ) $+21$ b. ( ) -5 c. ( ) $+5$ d. (X) -21

PROBLEMAS DO PRIMEIRO GRAU

A LINGUAGEM DAS EXPRESSÕES E SENTENÇAS MATEMÁTICAS

Você já aprendeu na unidade anterior as linguagens corrente e matemática das expressões e das sentenças matemáticas.

Vamos fazer mais exercícios, aplicando essas diferentes linguagens, pois isso é fundamental para a resolução de problemas.

VAMOS EXERCITAR

Passe para a linguagem matemática:

Bloco 1

Linguagem corrente	Linguagem matemática
O dobro de dez	$2 \cdot 10$
O triplo de quatro	$3 \cdot 4$
O quádruplo de dois	$4 \cdot 2$
O quíntuplo de cinco	$5 \cdot 5$
O séxtuplo de um	$6 \cdot 1$
O sétuplo de seis	$7 \cdot 6$

Bloco 2

Linguagem corrente	Linguagem matemática
A metade de seis	$\frac{1}{2} \cdot 6$
A terça parte de sete	$\frac{1}{3} \cdot 7$
A quarta parte de dez	$\frac{1}{4} \cdot 10$
A quinta parte de quinze	$\frac{1}{5} \cdot 15$
A sexta parte de trinta	$\frac{1}{6} \cdot 30$
A sétima parte de onze	$\frac{1}{7} \cdot 11$

Bloco 3

Linguagem corrente	Linguagem matemática
A soma de quinze com o triplo de dois	$15 + 3 \cdot 2$
A soma de sete com o quíntuplo de três	$7 + 5 \cdot 3$
A diferença entre oito e a quarta parte de doze	$8 - \frac{1}{4} \cdot 12$
A diferença entre dez e o dobro de quatro	$10 - 2 \cdot 4$
A soma da metade de sete com o quádruplo de seis	$\frac{1}{2} \cdot 7 + 4 \cdot 6$

Bloco 4

Linguagem corrente	Linguagem matemática
Um número	x
A metade de um número	$\frac{1}{2} x$
A quinta parte de um número	$\frac{1}{5} x$
O dobro de um número	$2x$
O triplo de um número	$3x$
Três quartos de um número	$\frac{3}{4} x$
A soma de um número com cinco	$x + 5$
A diferença entre um número e dez	$x - 10$
A soma de um número com a sua terça parte	$x + \frac{1}{3} x$

Bloco 5

Linguagem corrente	Linguagem matemática
Dois números cuja soma é quatro	x e $4 - x$
Dois números cuja diferença é cinco	x e $x + 5$
Dois números, sendo um deles a sexta parte do outro	x e $\frac{1}{6}x$
Dois números em que um deles é o triplo do outro	x e $3x$
Dois números, sendo que um deles é dois quintos do outro	x e $\frac{2}{5}x$
Dois números, sendo que um deles excede o outro de duas unidades	x e $x + 2$

Aplicação das equações do primeiro grau: problemas

1) A soma de um número com 10 é igual a 12. Qual é esse número?

Linguagem matemática	Resolução:
Número = x	$x + 10 = 12$ $x = 12 - 10$ $x = 2$
Então: $x + 10 = 12$	

Resposta: O número é 2.

2) A soma de um número com 3 é igual a 11. Qual é esse número?

Linguagem matemática	Resolução:
Número = x	$x + 3 = 11$ $x = 11 - 3$ $x = 8$
Então: $x + 3 = 11$	

Resposta: O número é 8.

3) A diferença entre um número e 7 é igual a 3. Determine esse número.

Linguagem matemática	Resolução:
Número = x	$x - 7 = 3$ $x = 3 + 7$ $x = 10$
Então: $x - 7 = 3$	

Resposta: O número é 10.

4) A soma da metade de um número com 5 é igual a 9. Qual é esse número?

Linguagem matemática	Resolução:
Número = x	$\frac{x}{2} + 5 = 9$
Então: $\frac{1}{2}x + 5 = 9$	$\frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8$

Resposta: O número é 8.

5) A soma da terça parte de um número com 4 é igual a 8. Determine esse número.

Linguagem matemática	Resolução:
Número = x	$\frac{1}{3}x + 4 = 8 \Leftrightarrow \frac{x}{3} + 4 = 8$ $\frac{x}{3} = 8 - 4$ $\frac{x}{3} = 4 \Leftrightarrow x = 4 \cdot 3$ $x = 12$
Então: $\frac{1}{3}x + 4 = 8$	

Resposta: O número é 12.

6) A diferença entre a quarta parte de um número e 2 é igual a 7. Qual é esse número?

Linguagem matemática	Resolução:
Número = x	$\frac{1}{4}x - 2 = 7 \Leftrightarrow \frac{x}{4} - 2 = 7$ $\frac{x}{4} = 7 + 2$ $\frac{x}{4} = 9 \Leftrightarrow x = 4 \cdot 9$ $x = 36$
Então: $\frac{1}{4}x - 2 = 7$	

Resposta: O número é 36.

7) Acrescentando 6 anos à metade da idade de um menino obtém-se 13 anos. Qual é a idade desse menino?

Linguagem matemática	Resolução:
Idade = x	$\frac{1}{2}x + 6 = 13 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 6 = 13$ $\frac{x}{2} = 13 - 6$ $\frac{x}{2} = 7 \Leftrightarrow x = 7 \cdot 2$ $x = 14$
Então: $\frac{1}{2}x + 6 = 13$	

Resposta: A idade é 14 anos.

8) Acrescentando 3 ao dobro de um número, obtém-se 21. Descubra esse número.

Linguagem matemática	Resolução:
Número = x	$2x + 3 = 21$ $2x = 21 - 3$ $2x = 18$ $x = \frac{18}{2}$ $x = 9$
Então: $2x + 3 = 21$	

Resposta: O número é 9.

9) A soma de um número com a sua terça parte é igual a 20. Qual é esse número?

Linguagem matemática	Resolução
Número = x	$x + \frac{1}{3}x = 20 \iff x + \frac{x}{3} = 20 \Rightarrow \frac{3x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{60}{3} \Rightarrow$
Então: $x + \frac{1}{3}x = 20$	$\Rightarrow 3x + x = 60 \Rightarrow 4x = 60 \iff x = \frac{60}{4} \Rightarrow x = 15$

Resposta: O número é 15.

10) Acrescentando a um número a sua quarta parte, obtém-se 25. Descubra esse número.

Linguagem matemática	Resolução
Número = x	$\frac{1}{4}x + x = 25 \iff \frac{x}{4} + x = 25$
Então: $\frac{1}{4}x + x = 25$	$\frac{x}{4} + \frac{4x}{4} = \frac{100}{4} \Rightarrow x + 4x = 100$
	$5x = 100 \iff x = \frac{100}{5}$
	$x = 20$

Resposta: O número é 20.

11) A soma de um número com seus $\frac{2}{5}$ é igual a 14. Determine esse número.

Linguagem matemática	Resolução
Número = x	$x + \frac{2}{5}x = 14 \iff x + \frac{2x}{5} = 14$
Então: $x + \frac{2}{5}x = 14$	$\frac{5x}{5} + \frac{2x}{5} = \frac{70}{5} \Rightarrow 5x + 2x = 70$
	$7x = 70 \iff x = \frac{70}{7} \quad x = 10$

Resposta: O número é 10

12) A diferença entre um número e seus $\frac{3}{4}$ é igual a 21. Descubra esse número.

Linguagem matemática	Resolução
Número = x	$x - \frac{3}{4}x = 21 \iff x - \frac{3x}{4} = 21$
Então: $x - \frac{3}{4}x = 21$	$\frac{4x}{4} - \frac{3x}{4} = \frac{84}{4} \Rightarrow 4x - 3x = 84$
	$x = 84$

Resposta: O número é 84.

13) A soma do dobro de um número com sua terça parte é igual a 84. Qual é esse número?

Linguagem matemática	Resolução
Número = x	$2x + \frac{1}{3}x = 84 \iff 2x + \frac{x}{3} = 84$
Então: $2x + \frac{1}{3}x = 84$	$\frac{6x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{252}{3} \Rightarrow 6x + x = 252$
	$7x = 252 \iff x = \frac{252}{7}$
	$x = 36$

Resposta: O número é 36.

14) A diferença entre o triplo de um número e sua quinta parte é igual a 28. Determine esse número.

Linguagem matemática	Resolução
Número = x	$3x - \frac{1}{5}x = 28 \Longleftrightarrow 3x - \frac{x}{5} = 28$
Então: $3x - \frac{1}{5}x = 28$	$\frac{15x}{5} - \frac{x}{5} = \frac{140}{5} \Longrightarrow 15x - x = 140$
	$14x = 140 \Longleftrightarrow x = \frac{140}{14}$
	$x = 10$

Resposta: O número é 10.

15) Quantos anos tem Rogério, sabendo que o dobro de sua idade, somado à sexta parte dessa mesma idade, é igual a 26?

Linguagem matemática	Resolução
Idade = x	$2x + \frac{1}{6}x = 26 \Longleftrightarrow 2x + \frac{x}{6} = 26$
Então: $2x + \frac{1}{6}x = 26$	$\frac{12x}{6} + \frac{x}{6} = \frac{156}{6} \Longrightarrow 12x + x = 156$
	$13x = 156 \Longleftrightarrow x = \frac{156}{13}$
	$x = 12$

Resposta: A idade é 12 anos.

16) A soma de um número com 10 é igual ao dobro desse número. Qual é o número?

Linguagem matemática	Resolução
Número = x	$x + 10 = 2x$
Então: $x + 10 = 2x$	$x - 2x = -10$
	$-x = -10\ (-1)$
	$x = 10$

Resposta: O número é 10.

17) A soma de um número com 12 é igual ao triplo desse número. Descubra o número.

Linguagem matemática	Resolução
Número = x	$x + 12 = 3x$
Então: $x + 12 = 3x$	$x - 3x = -12$
	$-2x = -12\ (-1)$
	$2x = 12 \Longleftrightarrow x = \frac{12}{2}$
	$x = 6$

Resposta: O número é 6.

18) A diferença entre um número e 8 é igual à terça parte desse número. Determine o número.

Linguagem matemática	Resolução
Número = x	$x - 8 = \frac{1}{3}x \Longleftrightarrow x - 8 = \frac{x}{3}$
Então: $x - 8 = \frac{1}{3}x$	$\frac{3x}{3} - \frac{24}{3} = \frac{x}{3} \Longrightarrow 3x - 24 = x$
	$3x - x = 24$
	$2x = 24 \Longleftrightarrow x = \frac{24}{2}$
	$x = 12$

Resposta: O número é 12.

19) $\frac{2}{5}$ de um número, adicionados a 48, resultam no dobro desse número. Qual é esse número?

Linguagem matemática

Número = x

Então: $\frac{2}{5}x + 48 = 2x$

Resolução

$$\frac{2}{5}x + 48 = 2x \iff \frac{2x}{5} + 48 = 2x$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{240}{5} = \frac{10x}{5} \Rightarrow 2x + 240 = 10x$$

$$2x - 10x = -240$$

$$-8x = -240 \ (-1)$$

$$8x = 240 \iff x = \frac{240}{8}$$

$$x = 30$$

Resposta: O número é 30.

20) Subtraindo 18 do triplo de um número, obtêm-se $\frac{3}{4}$ desse número. Descubra o número.

Linguagem matemática

Número = x

Então: $3x - 18 = \frac{3}{4}x$

Resolução

$$3x - 18 = \frac{3}{4}x \iff 3x - 18 = \frac{3x}{4}$$

$$\frac{12x}{4} - \frac{72}{4} = \frac{3x}{4} \Rightarrow 12x - 72 = 3x$$

$$12x - 3x = 72$$

$$9x = 72 \iff x = \frac{72}{9}$$

$$x = 8$$

Resposta: O número é 8.

21) Quantos anos tem Marco, sabendo que $\frac{2}{3}$ de sua idade, somados à quinta parte dessa mesma idade, é igual a 13?

Linguagem matemática

Idade = x

Então: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x = 13$

Resolução

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x = 13 \iff \frac{2x}{3} + \frac{x}{5} = 13$$

$$\frac{10x}{15} + \frac{3x}{15} = \frac{195}{15} \Rightarrow 10x + 3x = 195$$

$$13x = 195 \iff x = \frac{195}{13}$$

$$x = 15$$

Resposta: A idade é 15 anos.

22) A medida da altura de um retângulo é igual a $\frac{2}{3}$ da medida da base. Determine essas dimensões, sabendo que o perímetro é igual a 60.

Linguagem matemática

Base = x

Altura = $\frac{2}{3}x$

Então: $2\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 60$

Resolução

$$2\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 60 \Rightarrow 2x + \frac{4x}{3} = 60$$

$$\frac{6x}{3} + \frac{4x}{3} = \frac{180}{3} \Rightarrow 6x + 4x = 180$$

$$10x = 180 \iff x = \frac{180}{10} \Rightarrow x = 18$$

A base mede 18 e a altura $\frac{2}{3} \cdot 18 = 12$

Resposta: 18 e 12.

23) Sabendo que a medida do comprimento da base de um retângulo é o triplo da medida do comprimento da altura e que seu perímetro é 80 m, determine as dimensões desse retângulo.

Linguagem matemática	Resolução
Base = $3x$ Altura = x **Então:** $2(3x + x) = 80$	$2(3x + x) = 80$ $6x + 2x = 80$ $8x = 80 \iff x = \frac{80}{8}$ $x = 10$ Base: $3 \cdot 10 = 30$ m

Resposta: A base mede 30 m e a altura, 10 m.

24) O perímetro de um quadrado é 12 cm. Quanto mede o lado desse quadrado?

Linguagem matemática	Resolução
Lado = x **Então:** $x + x + x + x = 12$	$x + x + x + x = 12$ $4x = 12 \iff x = \frac{12}{4}$ $x = 3$

Resposta: O lado mede 3 cm.

25) Sabendo que o perímetro de um retângulo é 70 m e que sua altura corresponde a $\frac{3}{4}$ da base, determine a medida dos lados.

Linguagem matemática	Resolução
Base = x Altura = $\frac{3}{4}x$ **Então:** $2(x + \frac{3}{4}x) = 70$	$2(x + \frac{3}{4}x) = 70$ $2x + \frac{6x}{4} = 70$ $\frac{8x}{4} + \frac{6x}{4} = \frac{280}{4} \Rightarrow 8x + 6x = 280$ $14x = 280 \iff x = \frac{280}{14}$ $x = 20$ Altura: $\frac{3}{4} \cdot 20 = 15$ m

Resposta: A base mede 20 m e a altura, 15 m.

26) A soma de $\frac{4}{5}$ de um número com 12 é igual à soma de $\frac{5}{6}$ desse mesmo número com 10. Qual é esse número?

Linguagem matemática	Resolução
Número = x **Então:** $\frac{4}{5}x + 12 = \frac{5}{6}x + 10$	$\frac{4}{5}x + 12 = \frac{5}{6}x + 10 \iff \frac{4x}{5} + 12 = \frac{5x}{6} + 10$ $\frac{24x}{30} + \frac{360}{30} = \frac{25x}{30} + \frac{300}{30} \Rightarrow 24x + 360 = 25x + 300$ $24x - 25x = 300 - 360$ $-x = -60 \; (-1)$ $x = 60$

Resposta: O número é 60.

27) Determine um número, sabendo que a diferença entre $\frac{3}{4}$ desse número e 3 é igual à soma da metade desse número com 1.

Linguagem matemática

Número = x

Então: $\frac{3}{4}x - 3 = \frac{1}{2}x + 1$

Resolução

$\frac{3}{4}x - 3 = \frac{1}{2}x + 1 \iff \frac{3x}{4} - 3 = \frac{x}{2} + 1$

$\frac{3x}{4} - \frac{12}{4} = \frac{2x}{4} + \frac{4}{4} \Rightarrow 3x - 12 = 2x + 4$

$3x - 2x = 4 + 12$

$x = 16$

Resposta: O número é 16.

28) A soma de dois números é 24. Quais são esses números, sabendo que o menor é igual a $\frac{3}{5}$ do maior?

Linguagem matemática

Maior = x

Menor = $\frac{3}{5}x$

Então: $x + \frac{3}{5}x = 24$

Resolução

$x + \frac{3}{5}x = 24 \iff x + \frac{3x}{5} = 24$

$\frac{5x}{5} + \frac{3x}{5} = \frac{120}{5} \Rightarrow 5x + 3x = 120$

$8x = 120 \iff x = \frac{120}{8} \Rightarrow x = 15$

O número maior é 15 e o menor $\frac{3}{5} \cdot 15 = 9$

Resposta: 15 e 9.

29) A soma de dois números é 44. Determine esses números, sabendo que o menor é igual a $\frac{5}{6}$ do maior.

Linguagem matemática

Maior = x

Menor = $\frac{5}{6}x$

Então: $x + \frac{5}{6}x = 44$

Resolução

$x + \frac{5}{6}x = 44 \iff x + \frac{5x}{6} = 44$

$\frac{6x}{6} + \frac{5x}{6} = \frac{264}{6} \Rightarrow 6x + 5x = 264$

$11x = 264$

$x = \frac{264}{11}$

$x = 24$

Número menor: $\frac{5}{6} \cdot 24 = 20$

Resposta: O número maior é 24 e o menor, 20.

30) Determine dois números, sabendo que um é o quádruplo do outro e que a soma deles é igual a 30.

Linguagem matemática

Maior = $4x$

Menor = x

Então: $4x + x = 30$

Resolução

$4x + x = 30$

$5x = 30 \iff x = \frac{30}{5}$

$x = 6$

Número maior: $4 \cdot 6 = 24$

Resposta: O número maior é 24 e o menor, 6.

31) A diferença entre as idades de dois irmãos é 10 anos. Quantos anos tem cada um, sabendo que a idade do mais velho é igual ao sêxtuplo da idade do mais jovem?

Linguagem matemática	Resolução
Mais velho = $6x$	$6x - x = 10$
Mais jovem = x	$5x = 10 \Longleftrightarrow x = \frac{10}{5}$
Então: $6x - x = 10$	$x = 2$
	Mais velho: $6 \cdot 2 = 12$

Resposta: O mais velho tem 12 anos e o mais jovem, 2 anos.

32) A diferença entre dois números é igual a 10. Determine esses números, sabendo que o menor é igual a $\frac{2}{7}$ do maior.

Linguagem matemática	Resolução
Maior = x	$x - \frac{2}{7}x = 10 \Longleftrightarrow x - \frac{2x}{7} = 10$
Menor = $\frac{2}{7}x$	$\frac{7x}{7} - \frac{2x}{7} = \frac{70}{7} \Rightarrow 7x - 2x = 70$
Então: $x - \frac{2}{7}x = 10$	$5x = 70 \Longleftrightarrow x = \frac{70}{5}$
	$x = 14$
	Número menor: $\frac{2}{7} \cdot 14 = 4$

Resposta: O número maior é 14 e o menor, 4.

33) Um número excede outro em 6 unidades. Quais são esses números, sabendo que a soma deles é igual a 20?

Linguagem matemática	Resolução
Maior = $x + 6$	$x + x + 6 = 20 \Rightarrow x + x = 20 - 6$
Menor = x	$2x = 14 \Longleftrightarrow x = \frac{14}{2} \Rightarrow x = 7$
Então: $x + x + 6 = 20$	O número maior é $7 + 6 = 13$, e o menor, 7.

Resposta: 13 e 7.

34) Determine dois números, sabendo que um excede o outro em 4 unidades e que a soma deles é 24.

Linguagem matemática	Resolução
Maior = $x + 4$	$x + 4 + x = 24$
Menor = x	$x + x = 24 - 4$
Então: $x + 4 + x = 24$	$2x = 20 \Longleftrightarrow x = \frac{20}{2}$
	$x = 10$
	Número maior: $10 + 4 = 14$

Resposta: O número maior é 14 e o menor é 10.

35) A soma de dois números é 42. Determine esses números, sabendo que o maior excede o menor em 12 unidades.

Linguagem matemática	**Resolução**
Maior = $x + 12$ Menor = x **Então:** $x + 12 + x = 42$	$x + 12 + x = 42$ $x + x = 42 - 12$ $2x = 30 \iff x = \frac{30}{2}$ $x = 15$ Número maior: $15 + 12 = 27$

Resposta: O número maior é 27 e o menor, 15.

36) A soma de dois números inteiros e consecutivos é 31. Quais são esses números?

Linguagem matemática	**Resolução**
Maior = $x + 1$ Menor = x **Então:** $x + x + 1 = 31$	$x + x + 1 = 31$ $x + x = 31 - 1$ $2x = 30 \iff x = \frac{30}{2} \Rightarrow x = 15$ Número maior: $15 + 1 = 16$

Resposta: O número maior é 16, e o menor, 15.

37) Sabendo que a soma de dois números inteiros e consecutivos é igual a 25, determine esses números.

Linguagem matemática	**Resolução**
Maior = $x + 1$ Menor = x **Então:** $x + 1 + x = 25$	$x + 1 + x = 25$ $x + x = 25 - 1$ $2x = 24 \iff x = \frac{24}{2}$ $x = 12$ Número maior: $12 + 1 = 13$

Resposta: O número maior é 13 e o menor, 12.

38) As idades de dois irmãos são representadas por dois números pares e consecutivos cuja soma é 38. Quais são as idades desses irmãos?

Linguagem matemática	**Resolução**
Maior = $2x + 2$ Menor = $2x$ **Então:** $2x + 2x + 2 = 38$	$2x + 2x + 2 = 38$ $2x + 2x = 38 - 2$ $4x = 36 \iff x = \frac{36}{4} \Rightarrow x = 9$ O número maior é $2 \cdot 9 + 2 = 20$, e o menor, $2 \cdot 9 = 18$.

Resposta: 20 anos e 18 anos.

39) A soma de dois números pares e consecutivos é igual a 122. Descubra esses números.

Linguagem matemática	Resolução
Maior = $2x+2$ Menor = $2x$ **Então:** $2x+2+2x=122$	$2x+2+2x=122$ $2x+2x=122-2$ $4x=120 \iff x=\frac{120}{4}$ $x=30$ Número maior: $2.30+2=62$ Número menor: $2.30=60$

Resposta: O número maior é 62 e o menor é 60.

40) Determine dois números ímpares e consecutivos, sabendo que a soma deles é igual a 44.

Linguagem matemática	Resolução
Maior $= 2x+3$ Menor $= 2x+1$ **Então:** $2x+1+2x+3=44$	$2x+1+2x+3=44$ $2x+2x=44-1-3$ $4x=40 \iff x=\frac{40}{4} \Rightarrow x=10$ O número maior é $2 \cdot 10+3=23$, e o menor, $2 \cdot 10+1=21$.

Resposta: 23 e 21.

41) As medidas da altura e da base de um retângulo são números ímpares e consecutivos. Determine as dimensões desse retângulo cujo perímetro é 64 m.

Linguagem matemática	Resolução
Altura $= 2x+1$ Base $= 2x+3$ **Então:** $2(2x+1+2x+3)=64$	$2(2x+1+2x+3)=64$ $4x+2+4x+6=64$ $4x+4x=64-2-6$ $8x=56 \iff x=\frac{56}{8}$ $x=7$ Altura: $2.7+1=15$ m Base: $2.7+3=17$ m

Resposta: A altura mede 15 m e a base, 17 m.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva os problemas:

1) Determine dois números inteiros e consecutivos cuja soma é 79. (39 e 40)

2) A soma da idade de um pai com a de seu filho é igual a 55 anos. Determine essas idades, sabendo que a idade do filho é igual a $\frac{3}{8}$ da idade do pai. (40 anos e 15 anos)

3) Decompor o número 39 em duas partes, de tal forma que uma seja o dobro da outra. (26 e 13)

4) Descubra um número que adicionado à sua terça parte dá como resultado 24. (18)

5) O dobro de um número mais a sua metade é igual a 50. Qual é esse número? (20)

6) A soma de um número com a sua quarta parte é igual à terça parte desse mesmo número acrescida de 55. Descubra esse número. (60)

7) Determine um número, sabendo que seus $\frac{2}{5}$, somados a seus $\frac{3}{4}$, são iguais ao dobro desse número, menos 34. (40)

8) Um número excede outro em 6 unidades. Quais são esses números, sabendo que a soma deles é igual a 30? (12 e 18)

9) A soma de dois números é igual a 50. Determine esses números, sabendo que o maior excede o menor em 4 unidades. (23 e 27)

10) A diferença de dois números é igual a 12. Determine esses números, sabendo que o menor é igual a $\frac{5}{8}$ do maior. (32 e 20)

11) Determine a medida do comprimento do lado de um quadrado cujo perímetro é 24 m. (6 m)

12) O perímetro de um retângulo é 40 m. Determine as dimensões desse retângulo, sabendo que a medida da base é o triplo da medida da altura. (5 m e 15 m)

13) O perímetro de um retângulo é 60 m. Sabendo que a medida da altura é igual a $\frac{3}{7}$ da medida da base, determine as dimensões desse retângulo. (9 m e 21 m)

14) A soma da idade de um pai com a de seu filho é igual a 45 anos. Determine essas idades, sabendo que a idade do filho é igual a $\frac{2}{7}$ da idade do pai. (35 anos e 10 anos)

15) A idade de um pai é igual ao triplo da idade de seu filho. Determine essas idades, sabendo que juntos têm 48 anos. (36 anos e 12 anos)

16) Determine dois números pares e consecutivos cuja soma é igual a 70. (34 e 36)

17) A soma de dois números ímpares e consecutivos é igual a 68. Quais são esses números? (33 e 35)

18) Determine três números inteiros e consecutivos cuja soma é igual a 39. (12, 13 e 14)

19) As medidas da altura e da base de um retângulo são números pares e consecutivos. Determine essas medidas, sabendo que o perímetro do retângulo é 52 m. (12 m e 14 m)

20) Decompor o número 75 em três partes, de modo que essas partes sejam números ímpares e consecutivos. (23, 25 e 27)

21) Um pai repartiu Cr$ 120,00 entre seus dois filhos. A parte recebida pelo mais velho excede em Cr$ 20,00 a do mais jovem. Quanto recebeu cada um? (Cr$ 50,00 e Cr$ 70,00)

22) A idade de um filho é igual à quinta parte da idade de seu pai, acrescida de 2 anos. Qual é a idade de cada um, sabendo que, juntos, têm 50 anos? (40 anos e 10 anos)

23) Um aluno perguntou ao seu professor de matemática a sua idade. O professor respondeu: "Os $\frac{2}{5}$ da minha idade adicionados a 3 são iguais à metade da minha idade". Qual é a idade desse professor? (30 anos)

24) Decomponha o número 56 em três partes, de modo que a segunda seja o dobro da primeira e que a terceira exceda a segunda em 6 unidades. (10, 20 e 26)

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Crie enunciados de problemas cujo equacionamento conduza a:

1) $x + 5 = 15$ 2) $2x - 3 = 13$ 3) $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{3}$

4) $x + \frac{2}{3}x = 15$ 5) $2x - \frac{x}{2} = 18$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Passe para a linguagem matemática:

1) Os $\frac{2}{3}$ de um número acrescidos de 10 é igual a 40. $\frac{2}{3}x + 10 = 40$

2) O dobro de um número, somado a 5, é igual a 15. $2x + 5 = 15$

3) A quarta parte de um número, menos 2, é igual a $\frac{2}{3}$ desse número. $\frac{1}{4}x - 2 = \frac{2}{3}x$

4) O quádruplo de um número, menos 10, é igual ao dobro desse número. $4x - 10 = 2x$

5) A metade de um número, mais a sua terça parte, é igual a esse número diminuído de 5. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = x - 5$

b) Complete adequadamente:

1) Se você tem agora 12 anos, daqui a **x** anos terá $12 + x$

2) Se você tem agora 12 anos, há **x** anos tinha $12 - x$

3) Se você tem agora **x** anos, daqui a 4 anos terá $x + 4$

4) Se você tem agora **x** anos, há 4 anos tinha $x - 4$

5) Se dois números são pares e consecutivos, a diferença entre eles é 2

6) Se dois números são ímpares e consecutivos, a diferença entre eles é 2

7) Se um número par é **2x**, o seu consecutivo é $2x + 2$

8) Se um número ímpar é **2x + 1**, o seu consecutivo é $2x + 3$

9) Se um número inteiro é **x − 1**, o seu consecutivo é x

10) Se um número par é **x − 2**, o seu consecutivo é x

c) Resolva:

1) Suponha que na sua classe existam 40 alunos e que o número de meninos excede o de meninas em 10 unidades. Quantos meninos e quantas meninas existem na sua classe? (25 meninos e 15 meninas)

2) Um pai distribuiu Cr$ 800,00 entre seus três filhos. O mais velho recebeu o dobro do que recebeu o mais jovem, e a quantia recebida pelo segundo irmão excedeu em Cr$ 100,00 o que recebeu o mais jovem. Quanto recebeu cada um? (Mais velho: Cr$ 350,00, o segundo: Cr$ 275,00 e o mais jovem: Cr$ 175,00)

3) Determine as medidas da base e da altura de um retângulo cujo perímetro é 26 cm, sabendo que a medida da base excede, em uma unidade, o triplo da medida da altura. (Base: 10 cm, altura: 3 cm)

4) A soma das idades de um pai e de seu filho é igual a 52 anos. Qual é a idade de cada um, sabendo que a idade do pai excede em 4 anos o triplo da idade do filho? (Pai: 40 anos; filho: 12 anos)

5) Marco tem 4 anos a mais do que Rogério. Quais as idades de Marco e Rogério, sabendo que a soma das idades de ambos é igual a 26 anos? (15 anos e 11 anos)

6) As medidas dos lados de um triângulo são expressas por números inteiros e consecutivos. Determine as medidas dos lados desse triângulo cujo perímetro é 12 m. (3 m, 4 m e 5 m)

7) O perímetro de um triângulo é 24 cm. Quais as medidas de seus lados, sabendo que são expressas por números pares e consecutivos? (6 cm, 8 cm e 10 cm)

8) Qual é o número cujos $\frac{3}{5}$ acrescidos de 3 unidades é igual aos seus $\frac{2}{3}$ diminuídos de duas unidades? (75)

9) Decomponha o número 192 em três partes, de tal forma que a segunda seja o dobro da primeira e que a terceira parte exceda a segunda em 12 unidades. (36, 72 e 84)

10) Um homem distribuiu uma certa quantia de dinheiro da seguinte forma: deu $\frac{1}{3}$ à sua esposa, a metade para seu filho, $\frac{1}{8}$ para seu sobrinho e Cr\$ 30 000,00 a um hospital. Determine a quantia que esse homem distribuiu. (Cr\$ 720 000,00)

d) Resolva os testes:

1) A soma de três números inteiros consecutivos é 18. Então, podemos afirmar que:

a. ( ) o menor é 6.
b. ( ) o maior é par.
c. (X) 10 é o dobro do menor.
d. ( ) 4 é o dobro do médio.

2) O número cujo triplo é igual a ele mesmo aumentado de 50 unidades é:

a. (X) 25. b. ( ) 30. c. ( ) 33. d. ( ) 20.

3) A metade de minha idade, adicionada à idade que eu tinha há dez anos atrás, corresponde à idade que terei daqui a um ano. A minha idade é:

a. ( ) 11 anos. b. ( ) 24 anos. c. ( ) 38 anos. d. (X) 22 anos.

4) Diofante foi um dos mais famosos matemáticos da Grécia. Sabe-se que, quando morreu, a metade de sua idade, diminuída de 20 anos, era igual à quarta parte de sua vida, aumentada de 1 ano. Podemos concluir que Diofante morreu com:

a. (X) 84 anos. b. ( ) 80 anos. c. ( ) 86 anos. d. ( ) 20 anos.

5) Em linguagem matemática, a sentença: $\frac{2}{5}$ de um número aumentados de 3 unidades é igual ao triplo desse número diminuído de 20 unidades, é escrita da seguinte forma:

a. ( ) $\frac{2x}{5} + 3 = \frac{x}{3} - 20$
b. ( ) $\frac{2x}{5} + 3 = x - 20$
c. (X) $\frac{2x}{5} + 3 = 3x - 20$
d. ( ) $\frac{2x}{5} + 3x = \frac{x}{3} - 20$

6) Se uma pessoa tem hoje **x** anos, há três anos ela tinha:

a. ( ) 3x anos. b. (X) x − 3 anos. c. ( ) 3 − x anos. d. ( ) $\frac{x}{3}$ anos.

7) Uma pessoa tem hoje 20 anos. Daqui a **x** anos ela terá:

a. ( ) 20x anos. b. ( ) x − 20 anos. c. (X) 20 + x anos. d. ( ) $\frac{20}{x}$ anos.

8) A soma de dois números é 15. Se um deles for **x**, o outro será:

a. ( ) 15x b. ( ) $\frac{x}{15}$ c. ( ) x − 15 d. (X) 15 − x

9) A diferença entre dois números é 8. Se o maior for **x**, então o menor será:

a. (X) x − 8 b. ( ) 8 − x c. ( ) 8x d. ( ) $\frac{8}{x}$

10) Dois números são pares e consecutivos. Se o número maior for **x**, então o menor será:

a. ( ) 2x b. (X) x − 2 c. ( ) x + 2 d. ( ) 2 − x

Unidade 11 INEQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

NOÇÃO DE INEQUAÇÃO

Ao estudar a unidade referente a equação, você aprendeu também o que é uma **inequação**. Vamos, então, recordar esse conceito:

Inequação é toda sentença numérica aberta que exprime uma desigualdade.

Veja:

$x < 2$ $\quad\quad$ $2x - 3 \neq 8$

$x - 1 > 5$ $\quad\quad$ $3(x - 1) < -4$

Quando a variável (x) figura apenas com expoente 1, dizemos que a inequação é do 1.º grau.

CONJUNTO VERDADE DE UMA INEQUAÇÃO

Considere a inequação: $x < 2$.

Quais os números naturais que tornam essa desigualdade verdadeira?

Como você pode verificar, todos os números naturais menores que 2 tornam a desigualdade acima verdadeira.

Assim:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Estes números são soluções da inequação $x < 2$. Logo, $V = \{0, 1\}$

Agora examine esta inequação: $x > 3$.

Qual é o seu conjunto verdade em $\mathbb{N}$?

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Estes números são soluções da inequação $x > 3$. Logo, $V = \{4, 5, 6, \ldots\}$

Determine o conjunto verdade, em $\mathbb{N}$, das inequações:

1) $x > 1$ $\quad V = \{$ 2, 3, 4, ... $\}$

2) $x < 5$ $\quad V = \{$ 0, 1, 2, 3, 4 $\}$

3) $y > 6$ $\quad V = \{$ 7, 8, 9, ... $\}$

4) $y < 6$ $\quad V = \{$ 0, 1, 2, 3, 4, 5 $\}$

5) $x \leqslant 5$ $\quad V = \{$ 0, 1, 2, 3, 4, 5 $\}$

6) $y \geqslant 4$ $\quad V = \{$ 4, 5, 6, 7, 8, ... $\}$

UMA NOVA FORMA DE REPRESENTAR O CONJUNTO VERDADE

Considere a inequação: $x < 3$.

Quais os números racionais que tornam essa desigualdade verdadeira?

Todos os números racionais menores que 3 tornam a desigualdade acima verdadeira. Entretanto, existem infinitos números racionais menores que 3, e, por isso, é difícil representar o conjunto desses números indicando todos os seus elementos. Então, representamos esse conjunto da seguinte forma:

$x < 3 \Longrightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 3\}$ (Lê-se: x pertence a $\mathbb{Q}$, tal que x seja menor que 3.)

Dê o conjunto verdade das inequações:

1) $x < 2$

$U = \mathbb{N}$

$V = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2\}$

2) $x > 4$

$U = \mathbb{Q}$

$V = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 4 \}$

3) $y < \frac{1}{2}$

$U = \mathbb{Q}$

$V = \{ y \in \mathbb{Q} \mid y < \frac{1}{2} \}$

4) $y \geqslant 5$

$U = \mathbb{Z}$

$V = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y \geqslant 5 \}$

5) $x \leqslant \frac{2}{3}$

$U = \mathbb{Q}$

$V = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant \frac{2}{3} \}$

6) $x \neq -1$

$U = \mathbb{Z}$

$V = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \neq -1 \}$

Muitas vezes, essa nova representação pode ser feita, indicando os elementos do conjunto. Veja:

$V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$

Essa representação indica todos os números naturais maiores que 3.

Então: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \boxed{4, 5, 6, \ldots}\}$ **Logo:** $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\} = \{4, 5, 6, \ldots\}$

Indique os elementos dos conjuntos:

1) $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\} = \{ 0, 1, 2 \}$

2) $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\} = \{ 6, 7, 8, \ldots \}$

3) $V = \{y \in \mathbb{N} \mid y \leqslant 4\} = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$

4) $V = \{y \in \mathbb{N} \mid y \geqslant 6\} = \{ 6, 7, 8, \ldots \}$

5) $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 1\} = \{ 0 \}$

6) $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 0\} = \{ 0 \}$

PRINCÍPIOS DE EQUIVALÊNCIA DAS DESIGUALDADES

Princípio aditivo: adição e subtração

Adicionando ou subtraindo o mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade verdadeira, obtém-se uma nova desigualdade verdadeira e com o sinal no mesmo sentido.

Veja:

$3 < 5 \text{ (V)} \Longrightarrow 3 \boxed{+2} < 5 \boxed{+2}$

$5 < 7 \text{ (V)}$

sinais no mesmo sentido

$5 > 3 \text{ (V)} \Longrightarrow 5 \boxed{-2} > 3 \boxed{-2}$

$3 > 1 \text{ (V)}$

sinais no mesmo sentido

Princípio multiplicativo: multiplicação e divisão

Multiplicando ou dividindo o mesmo **número positivo** por ambos os membros de uma desigualdade verdadeira, obtém-se uma nova desigualdade verdadeira e com o sinal no mesmo sentido.

Veja:

$3 < 5 \text{ (V)} \Longrightarrow 3 \boxed{\cdot 2} < 5 \boxed{\cdot 2}$

$6 < 10 \text{ (V)}$

sinais no mesmo sentido

$8 > 4 \text{ (V)} \Longrightarrow 8 \boxed{:2} > 4 \boxed{:2}$

$4 > 2 \text{ (V)}$

sinais no mesmo sentido

Observação: multiplicando ou dividindo o mesmo **número negativo** por ambos os membros de uma desigualdade verdadeira, obtém-se uma nova desigualdade verdadeira, porém com os sinais em sentido contrário.

Observe:

$3 < 5 \text{ (V)} \Longrightarrow 3 \boxed{\cdot (-2)} > 5 \boxed{\cdot (-2)}$

$-6 > -10 \text{ (V)}$

sinais em sentido contrário

$6 > 4 \text{ (V)} \Longrightarrow 6 \boxed{:(-2)} < 4 \boxed{:(-2)}$

$-3 < -2 \text{ (V)}$

sinais em sentido contrário

Dê o conjunto verdade das inequações:

1) $x < 2$

$U = \mathbb{N}$

$V = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2\}$

2) $x > 4$

$U = \mathbb{Q}$

$V = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 4 \}$

3) $y < \frac{1}{2}$

$U = \mathbb{Q}$

$V = \{ y \in \mathbb{Q} \mid y < \frac{1}{2} \}$

4) $y \geqslant 5$

$U = \mathbb{Z}$

$V = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y \geqslant 5 \}$

5) $x \leqslant \frac{2}{3}$

$U = \mathbb{Q}$

$V = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant \frac{2}{3} \}$

6) $x \neq -1$

$U = \mathbb{Z}$

$V = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \neq -1 \}$

Muitas vezes, essa nova representação pode ser feita, indicando os elementos do conjunto. Veja:

$V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$

Essa representação indica todos os números naturais maiores que 3.

Então: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \boxed{4, 5, 6, \ldots}\}$ **Logo:** $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\} = \{4, 5, 6, \ldots\}$

Indique os elementos dos conjuntos:

1) $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\} = \{ 0, 1, 2 \}$

2) $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\} = \{ 6, 7, 8, \ldots \}$

3) $V = \{y \in \mathbb{N} \mid y \leqslant 4\} = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$

4) $V = \{y \in \mathbb{N} \mid y \geqslant 6\} = \{ 6, 7, 8, \ldots \}$

5) $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 1\} = \{ 0 \}$

6) $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 0\} = \{ 0 \}$

PRINCÍPIOS DE EQUIVALÊNCIA DAS DESIGUALDADES

Princípio aditivo: adição e subtração

Adicionando ou subtraindo o mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade verdadeira, obtém-se uma nova desigualdade verdadeira e com o sinal no mesmo sentido.

Veja:

$3 < 5 \text{ (V)} \Longrightarrow 3 \boxed{+2} < 5 \boxed{+2}$

$5 < 7 \text{ (V)}$

sinais no mesmo sentido

$5 > 3 \text{ (V)} \Longrightarrow 5 \boxed{-2} > 3 \boxed{-2}$

$3 > 1 \text{ (V)}$

sinais no mesmo sentido

Princípio multiplicativo: multiplicação e divisão

Multiplicando ou dividindo o mesmo **número positivo** por ambos os membros de uma desigualdade verdadeira, obtém-se uma nova desigualdade verdadeira e com o sinal no mesmo sentido.

Veja:

$3 < 5 \text{ (V)} \Longrightarrow 3 \boxed{\cdot 2} < 5 \boxed{\cdot 2}$

$6 < 10 \text{ (V)}$

sinais no mesmo sentido

$8 > 4 \text{ (V)} \Longrightarrow 8 \boxed{: 2} > 4 \boxed{: 2}$

$4 > 2 \text{ (V)}$

sinais no mesmo sentido

Observação: multiplicando ou dividindo o mesmo **número negativo** por ambos os membros de uma desigualdade verdadeira, obtém-se uma nova desigualdade verdadeira, porém com os sinais em sentido contrário.

Observe:

$3 < 5 \text{ (V)} \Longrightarrow 3 \boxed{\cdot (-2)} > 5 \boxed{\cdot (-2)}$

$-6 > -10 \text{ (V)}$

sinais em sentido contrário

$6 > 4 \text{ (V)} \Longrightarrow 6 \boxed{: (-2)} < 4 \boxed{: (-2)}$

$-3 < -2 \text{ (V)}$

sinais em sentido contrário

Complete adequadamente:

1) $6 < 10$ (V) $\Longrightarrow 6 + 1$ <u>$<$</u> $10 + 1$ (V)

2) $7 > 5$ (V) $\Longrightarrow 7 - 2$ <u>$>$</u> $5 - 2$ (V)

3) $3 < 8$ (V) $\Longrightarrow 3 \cdot 4$ <u>$<$</u> $8 \cdot 4$ (V)

4) $12 > 8$ (V) $\Longrightarrow 12 : 4$ <u>$>$</u> $8 : 4$ (V)

5) $2 < 9$ (V) $\Longrightarrow 2 \cdot (-1)$ <u>$>$</u> $9 \cdot (-1)$ (V)

6) $15 > 12$ (V) $\Longrightarrow 15 : (-3)$ <u>$<$</u> $12 : (-3)$ (V)

7) $1 < 5$ (V) $\Longrightarrow 1 + 3 < 5 +$ <u>3</u> (V)

8) $10 > 8$ (V) $\Longrightarrow 10 -$ <u>6</u> $> 8 - 6$ (V)

9) $16 > 4$ (V) $\Longrightarrow 16 : (-2) < 4 :$ <u>(-2)</u> (V)

10) $1 > -1$ (V) $\Longrightarrow 1 \cdot (-1) < -1 \cdot$ <u>(-1)</u> (V)

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Dê, em $\mathbb{N}$, o conjunto verdade das seguintes inequações:

1) $x > 8$
V = { 9, 10, 11, 12, ... }

2) $x \leqslant 3$
V = { 0, 1, 2, 3 }

3) $y \geqslant 2$
V = { 2, 3, 4, ... }

4) $x \geqslant 0$
V = { 0, 1, 2, 3, ... }

5) $x \leqslant 10$
V = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }

6) $x < 0$
V = { }

7) $x > 50$
V = { 51, 52, 53, ... }

8) $y < 9$
V = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

9) $x \leqslant 2$
V = { 0, 1, 2 }

10) $x \geqslant 99$
V = { 99, 100, 101, ... }

b) Dê, em $\mathbb{Z}$, o conjunto verdade das inequações:

1) $x > -2$
V = { -1, 0, +1, +2, ... }

2) $x < -1$
V = { ..., -4, -3, -2 }

3) $x \geqslant -4$
V = { -4, -3, -2, -1, 0, +1, ... }

4) $x \leqslant -3$
V = { ..., -5, -4, -3 }

5) $x \geqslant +3$
V = { +3, +4, +5, ... }

6) $x \leqslant +5$
V = { ..., -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5 }

7) $x < 0$
V = { ..., -3, -2, -1 }

8) $x \geqslant 0$
V = { 0, +1, +2, +3, ... }

9) $x > 0$
V = { +1, +2, +3, ... }

10) $x \leqslant 0$
V = { ..., -3, -2, -1, 0 }

c) Dê os seguintes conjuntos por indicação dos seus elementos:

1) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$
A = { 0, 1, 2, 3, 4 }

2) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 4\}$
B = { 5, 6, 7, ... }

3) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 5\}$
C = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }

4) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 4\}$
D = { 4, 5, 6, ... }

5) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -4\}$

$E = \{$ -3, -2, -1, 0, 1, ... $\}$

6) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > +1\}$

$F = \{$ +2, +3, +4, ... $\}$

7) $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant -3\}$

$G = \{$ -3, -2, -1, 0, +1, ... $\}$

8) $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant +3\}$

$H = \{$ ..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 $\}$

RESOLUÇÃO DE UMA INEQUAÇÃO: A OBTENÇÃO DO CONJUNTO VERDADE

Aplicando às inequações os princípios aditivo e multiplicativo, obtém-se inequações equivalentes cada vez mais simples, até que se possa saber qual é o conjunto verdade. Para isso, seguimos o mesmo critério de resolução das equações.

Observe este exemplo:

Determine, em $\mathbb{N}$, o conjunto verdade da inequação $x - 1 > 2$:

$x \boxed{-1} > 2 \iff x > 2 + 1$

$x > 3$. Logo, $V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\} = \{4, 5, 6, \ldots\}$

Determine, em $\mathbb{N}$, o conjunto verdade das inequações:

Bloco 1	Bloco 2	Bloco 3
$x - 2 > 3$ $x > 3 + 2$; $x > 5$ $V = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 5 \}$ ou $V = \{ 6, 7, 8, \ldots \}$	$x + 2 > 2$ $x > 2 - 2$; $x > 0$ $V = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \}$ ou $V = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$	$y - 1 > 0$ $y > 0 + 1$; $y > 1$ $V = \{ y \in \mathbb{N} \mid y > 1 \}$ ou $V = \{ 2, 3, 4, \ldots \}$
$x - 3 < 1$ $x < 1 + 3$; $x < 4$ $V = \{ x \in \mathbb{N} \mid x < 4 \}$ ou $V = \{ 0, 1, 2, 3 \}$	$y + 3 < 3$ $y < 3 - 3$; $y < 0$ $V = \{ y \in \mathbb{N} \mid y < 0 \}$ ou $V = \{ \quad \}$	$x - 1 < 0$ $x < 0 + 1$; $x < 1$ $V = \{ x \in \mathbb{N} \mid x < 1 \}$ ou $V = \{ 0 \}$

Vamos determinar o conjunto verdade, em $\mathbb{Z}$, da inequação $x - 1 < 2x + 2$:

$x \boxed{-1} < \boxed{2x} + 2 \iff x - 2x < 2 + 1$

$-x < 3 \quad (-1)$

$x > -3$. Logo, $V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Determine, em $\mathbb{Z}$, o conjunto verdade das inequações:

$x + 1 > 2x - 3$ $x - 2x > -3 - 1$; $-x > -4 \ (-1)$; $x < 4$ $V = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x < 4 \}$ ou $V = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$	$2y - 3 < 3y + 1$ $2y - 3y < 1 + 3$; $-y < 4 \ (-1)$; $y > -4$ $V = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y > -4 \}$ ou $V = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$	$-4 \leqslant x - 3$ $-x \leqslant -3 + 4$; $-x \leqslant 1 \ (-1)$; $x \geqslant -1$ $V = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant -1 \}$ ou $V = \{ -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$

Vejamos outro exemplo.

Determine, em $\mathbb{Q}$, o conjunto verdade da inequação $x - 1 < 3x + 2$:

$$x - 1 < 3x + 2 \iff x - 3x < 2 + 1$$
$$-2x < 3 \ (-1)$$
$$2x > -3 \iff x > \frac{-3}{2}. \text{ Logo, } V = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{-3}{2} \right\}$$

Descubra, em $\mathbb{Q}$, o conjunto verdade das inequações:

$2y > 5y - 3$	$6y - 3 \geqslant 2y + 9$	$2(x - 1) < 5(x - 2)$	$x - 1 \leqslant 3(x + 2)$
$2y - 5y > -3$ $-3y > -3 (-1)$ $3y < 3$ $y < \frac{3}{3}$ $y < 1$	$6y - 2y \geqslant 9 + 3$ $4y \geqslant 12$ $y \geqslant \frac{12}{4}$ $y \geqslant 3$	$2x - 2 < 5x - 10$ $2x - 5x < -10 + 2$ $-3x < -8 (-1)$ $3x > 8$ $x > \frac{8}{3}$	$x - 1 \leqslant 3x + 6$ $x - 3x \leqslant 6 + 1$ $-2x \leqslant 7 (-1)$ $2x \geqslant -7$ $x \geqslant \frac{-7}{2}$
$V = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < 1\}$	$V = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geqslant 3\}$	$V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{8}{3}\}$	$V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant \frac{-7}{2}\}$

Vamos indicar o conjunto verdade, em $\mathbb{Q}$, da inequação $\frac{x}{2} + 1 > x - \frac{1}{3}$:

$$\frac{x}{2} + 1 > x - \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{m.m.c. } (2; 3) = 6} \frac{3x}{6} + \frac{6}{6} > \frac{6x}{6} - \frac{2}{6} \Rightarrow 3x + 6 > 6x - 2$$
$$3x - 6x > -2 - 6$$
$$-3x > -8 \ (-1)$$
$$3x < 8$$
$$x < \frac{8}{3}. \text{ Logo, } V = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x < \frac{8}{3} \right\}$$

Dê o conjunto verdade, em $\mathbb{Q}$, das inequações:

$\frac{x}{3} - 2 > \frac{x}{4} + 1$	$\frac{y - 1}{4} < \frac{2y - 3}{2}$	$\frac{2x}{3} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{x}{4} - \frac{5}{6}$
m.m.c $(3, 4) = 12$ $\frac{4x}{12} - \frac{24}{12} > \frac{3x}{12} + \frac{12}{12}$ $4x - 24 > 3x + 12$ $4x - 3x > 12 + 24$ $x > 36$	m.m.c.$(4, 2) = 4$ $\frac{y-1}{4} < \frac{2(2y-3)}{4}$ $y - 1 < 4y - 6$ $y - 4y < -6 + 1$ $-3y < -5 (-1)$ $3y > 5$ $y > \frac{5}{3}$	m.m.c.$(3, 2, 4, 6) = 12$ $\frac{8x}{12} + \frac{6}{12} \geqslant \frac{3x}{12} - \frac{10}{12}$ $8x + 6 \geqslant 3x - 10$ $8x - 3x \geqslant -10 - 6$ $5x \geqslant -16$ $x \geqslant \frac{-16}{5}$
$V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 36\}$	$V = \{y \in \mathbb{Q} \mid y > \frac{5}{3}\}$	$V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant \frac{-16}{5}\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Determine, em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, o conjunto verdade das inequações:

1) $x - 1 > 11$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 12\} = \{13, 14, 15, \ldots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 12\} = \{13, 14, 15, \ldots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 12\}$

2) $2x - 3 < 3x + 1$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > -4\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -4\} = \{-3, -2, -1, 0, +1, \ldots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -4\}$

3) $2(2x-1) < 3(x-4)$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} \mid x < -10\} = \{\ \}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -10\} = \{\dots, -13, -12, -11\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -10\}$

4) $\frac{x}{5} - 2 > \frac{x}{2} - 1$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} \mid x < -\frac{10}{3}\} = \{\ \}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -\frac{10}{3}\} = \{\dots, -6, -5, -4\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -\frac{10}{3}\}$

5) $3(x-2) < x+2$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 4\} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 4\}$

6) $\frac{y-1}{2} < \frac{2y+1}{3}$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{N} \mid y > -5\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Z} \mid y > -5\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, \dots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Q} \mid y > -5\}$

7) $4(2-x) \geqslant 2(x+4)$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 0\} = \{0\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant 0\} = \{\dots, -2, -1, 0\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 0\}$

8) $y - 2(y-4) > y - 6$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{N} \mid y < 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Z} \mid y < 7\} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < 7\}$

9) $3y - 4 > 4y - 4$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{N} \mid y < 0\} = \{\ \}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Z} \mid y < 0\} = \{\dots, -3, -2, -1\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < 0\}$

10) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \leqslant \frac{1}{4} - \frac{x}{6}$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant \frac{3}{4}\} = \{0\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant \frac{3}{4}\} = \{\dots, -2, -1, 0\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant \frac{3}{4}\}$

11) $7y - 2 < y + 4$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{N} \mid y < 1\} = \{0\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Z} \mid y < 1\} = \{\dots, -2, -1, 0\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < 1\}$

12) $\frac{3x}{5} - 2 > \frac{x}{2}$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 20\} = \{21, 22, 23, \dots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 20\} = \{21, 22, 23, \dots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 20\}$

13) $3(2-x) < \frac{2x}{3}$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} \mid x > \frac{18}{11}\} = \{2, 3, 4, \dots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > \frac{18}{11}\} = \{2, 3, 4, \dots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{18}{11}\}$

14) $2(3y-2) - 3 \geqslant 5$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{N} \mid y \geqslant 2\} = \{2, 3, 4, \dots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \geqslant 2\} = \{2, 3, 4, \dots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geqslant 2\}$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Dê, por indicação de seus elementos, o conjunto verdade em $\mathbb{N}$ das seguintes inequações:

1) $x \geqslant 25$ — $V = \{25, 26, 27, \dots\}$

2) $x < 7$ — $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3) $x \leqslant 8$ — $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

4) $x \leqslant 15$ — $V = \{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}$

5) $x \geqslant 0$ — $V = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

6) $x \leqslant 5$ — $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

b) Dê, por indicação de seus elementos, o conjunto verdade em $\mathbb{Z}$ das seguintes inequações:

1) $x < +1$ — $V = \{\dots, -2, -1, 0\}$

2) $x > -1$ — $V = \{0, +1, +2, +3, \dots\}$

3) $x \geqslant +9$ — $V = \{+9, +10, +11, \dots\}$

4) $x \leqslant -9$ — $V = \{\dots, -11, -10, -9\}$

5) $x < 0$ — $V = \{\dots, -2, -1, 0\}$

6) $x > -5$ — $V = \{-4, -3, -2, \dots\}$

c) Dê, por indicação de seus elementos, os seguintes conjuntos:

1) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 12\}$ — $A = \{13, 14, 15, \ldots\}$

2) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$ — $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -2\}$ — $C = \{-1, 0, +1, +2, \ldots\}$

4) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant +12\}$ — $D = \{+12, +13, +14, \ldots\}$

5) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant -11\}$ — $E = \{\ldots, -13, -12, -11\}$

6) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < +1\}$ — $F = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

d) Dê, por indicação de uma propriedade, os seguintes conjuntos:

1) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, \ldots\}$ — $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \geqslant -3\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} / x > -4\}$

2) $B = \{\ldots, -7, -6, -5\}$ — $B = \{x \in \mathbb{Z} / x \leqslant -5\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} / x < -4\}$

3) $C = \{-2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$ — $C = \{x \in \mathbb{Z} / x \geqslant -2\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} / x > -3\}$

4) $D = \{\ldots, -11, -10, -9, -8, -7\}$ — $D = \{x \in \mathbb{Z} / x \leqslant -7\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} / x < -6\}$

5) $E = \{-15, -14, -13, \ldots\}$ — $E = \{x \in \mathbb{Z} / x \geqslant -15\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} / x > -16\}$

6) $F = \{+15, +16, +17, \ldots\}$ — $F = \{x \in \mathbb{Z} / x \geqslant +15\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} / x > +14\}$

e) Dê, em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, o conjunto verdade das seguintes inequações:

1) $2x - 3(2x + 1) \geqslant -15$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} / x \leqslant 3\} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} / x \leqslant 3\}$

2) $3x - 2(x - 1) > 11 - 8x$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} / x > 1\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} / x > 1\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} / x > 1\}$

3) $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} - 1 \leqslant 3$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} / x \geqslant -24\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} / x \geqslant -24\} = \{-24, -23, -22, \ldots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} / x \geqslant -24\}$

4) $6(2y + 1) > 5(y - 3)$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{N} / y > -3\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Z} / y > -3\} = \{-2, -1, 0, +1, \ldots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Q} / y > -3\}$

5) $3(2y + 1) > 2(1 - 3y)$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{N} / y > -\frac{1}{12}\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Z} / y > -\frac{1}{12}\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{y \in \mathbb{Q} / y > -\frac{1}{12}\}$

6) $-3x - 4 \leqslant 4x + 3$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} / x \geqslant -1\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} / x \geqslant -1\} = \{-1, 0, +1, +2, \ldots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} / x \geqslant -1\}$

7) $\frac{x - 1}{3} > \frac{x + 1}{2}$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} / x < -5\} = \{\ \}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} / x < -5\} = \{\ldots, -8, -7, -6\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} / x < -5\}$

8) $\frac{2x - 1}{6} - 2 < \frac{2x - 1}{4} - \frac{1}{2}$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} / x > -\frac{17}{2}\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} / x > -\frac{17}{2}\} = \{-8, -7, -6, \ldots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} / x > -\frac{17}{2}\}$

9) $4x - 2(x + 1) \leqslant 2x - 3(1 - x)$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} / x \geqslant \frac{1}{3}\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} / x \geqslant \frac{1}{3}\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} / x \geqslant \frac{1}{3}\}$

10) $\frac{3 - x}{4} + x < \frac{1}{2} - \frac{x - 1}{3}$

$U = \mathbb{N} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{N} / x < \frac{1}{13}\} = \{0\}$

$U = \mathbb{Z} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Z} / x < \frac{1}{13}\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

$U = \mathbb{Q} \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{Q} / x < \frac{1}{13}\}$

Unidade 12 — SISTEMA DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

NOÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

Toda sentença aberta e composta, constituída por duas equações do primeiro grau com duas variáveis, recebe o nome de **sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis.**

Exemplos:

$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 1 = y \\ y + 2 = x + 3 \end{cases}$

Os valores atribuídos a x e y (solução do sistema) devem tornar verdadeiras as duas igualdades.

Observe o exemplo:

Verifique se os valores x = 2 e y = 3 constituem a solução do sistema:

$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

$\boxed{x} + 2\boxed{y} = 8$ e $2\boxed{x} - \boxed{y} = 1$

$2 + 2 \cdot 3 = 8$ e $2 \cdot 2 - 3 = 1$

$2 + 6 = 8$ $4 - 3 = 1$

$8 = 8$ (V) $1 = 1$ (V)

Logo: x = 2 e y = 3 é a solução do sistema.

Como se indicam os conjuntos universo e verdade de um sistema?

Indicam-se da seguinte forma:

$U = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Esta indicação significa que o universo das duas equações é o conjunto dos números naturais.)

$V = \{(x, y)\}$ (Para indicar o conjunto verdade, escrevem-se os valores entre parênteses, sendo que, em primeiro lugar, escreve-se o valor de x.)

Dessa forma, para o sistema analisado anteriormente temos:

$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ em $U = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tem-se: $V = \{(2, 3)\}$

Prove que os valores dados constituem a solução dos sistemas e escreva o conjunto verdade, em $U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$:

Bloco 1

x = 1, y = 4 $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$	x = 5, y = −2 $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 7 \end{cases}$
$\boxed{x} + 3\boxed{y} = 13$ e $3\boxed{x} + \boxed{y} = 7$	$2\boxed{x} + 3\boxed{y} = 4$ e $\boxed{x} - \boxed{y} = 7$
$1 + 3.4 = 13$ $3.1 + 4 = 7$	$2.5 + 3.(-2) = 4$ $5 - (-2) = 7$
$1 + 12 = 13$ $3 + 4 = 7$	$10 - 6 = 4$ $5 + 2 = 7$
$13 = 13$ (V) $7 = 7$ (V)	$4 = 4$ (V) $7 = 7$ (V)
V = {(1, 4)}	V = {(5, −2)}

Bloco 2

$x = \frac{1}{2}$, $y = 2$ $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$	$x = 6$, $y = 9$ $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6 \\ \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{5} \end{cases}$
$2\boxed{x} + 2\boxed{y} = 5$ e $4\boxed{x} - \boxed{y} = 0$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6$ e $\frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{5}$
$2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 = 5$; $4 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 0$	$\frac{6}{2} + \frac{9}{3} = 6$; $\frac{6+2}{4} = \frac{9+1}{5}$
$1 + 4 = 5$; $2 - 2 = 0$	$3 + 3 = 6$; $\frac{8}{4} = \frac{10}{5}$
$5 = 5$ (V) ; $0 = 0$ (V)	$6 = 6$ (V) ; $2 = 2$ (V)
$V = \{(\frac{1}{2}, 2)\}$	$V = \{(6, 9)\}$

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO: COMO DETERMINAR O CONJUNTO VERDADE DE UM SISTEMA

Existem vários métodos de resolução de um sistema. Por enquanto, você vai aprender apenas dois deles: o método da substituição e o da adição.

Método da substituição

De acordo com esse método, deve-se isolar uma variável numa das equações e, em seguida, substituir essa mesma variável, na outra equação, pelo valor encontrado.

Veja:

Determine o conjunto verdade, em $U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, do sistema: $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

$x + \boxed{2y} = 8$ (primeira equação)

$x = 8 - 2y$ (variável x isolada)

$2\boxed{x} - y = 6$ (segunda equação)

$2 \cdot (8 - 2y) - y = 6$

$16 - 4y - y = 6 \Longleftrightarrow -4y - y = 6 - 16$

$-5y = -10 \quad (-1)$

$5y = 10 \Longleftrightarrow y = \frac{10}{5}$

$\boxed{y = 2}$ (Está descoberto o valor de y.)

Agora, encontra-se o valor de x, substituindo o valor de y em qualquer uma das duas equações ou, então, na equação em que a variável x aparece isolada.

$x + 2\boxed{y} = 8$ (primeira equação)		$2x - \boxed{y} = 6$ (segunda equação)		$x = 8 - 2\boxed{y}$
$x + 2 \cdot 2 = 8$		$2x - 2 = 6$		$x = 8 - 2 \cdot 2$
$x + 4 = 8$	ou	$2x = 6 + 2$	ou	$x = 8 - 4$
$x = 8 - 4$		$2x = 8 \Longleftrightarrow x = \frac{8}{2}$		$\boxed{x = 4}$
$\boxed{x = 4}$		$\boxed{x = 4}$		

Então: $x = 4$ e $y = 2$. Logo, $V = \{(4, 2)\}$

Descubra o conjunto verdade, em $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, dos seguintes sistemas:

1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

$x - \boxed{y} = 3$
$x = 3 + y$

$3\boxed{x} - 2y = 11$
$3 \cdot (3 + y) - 2y = 11$
$9 + 3y - 2y = 11$
$3y - 2y = 11 - 9$
$y = 2$

$x = 3 + y$
$x = 3 + 2$
$x = 5$

V = {(5, 2)}

2) $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

$x - 2y = 8$
$x = 8 + 2y$

$3x - y = 9$
$3.(8 + 2y) - y = 9$
$24 + 6y - y = 9$
$6y - y = 9 - 24$
$5y = -15 \Leftrightarrow y = -\frac{15}{5}$
$y = -3$

$x = 8 + 2y$
$x = 8 + 2.(-3)$
$x = 8 - 6$
$x = 2$

V = {(2, -3)}

3) $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$

$2x + y = 16$
$y = 16 - 2x$

$3x - 2y = 10$
$3x - 2.(16 - 2x) = 10$
$3x - 32 + 4x = 10$
$3x + 4x = 10 + 32$
$7x = 42 \Leftrightarrow x = \frac{42}{7}$
$x = 6$

$y = 16 - 2x$
$y = 16 - 2.6$
$y = 16 - 12$
$y = 4$

V = {(6, 4)}

4) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$

$x + 2y = 3$
$x = 3 - 2y$

$3x - 4y = 4$
$3.(3 - 2y) - 4y = 4$
$9 - 6y - 4y = 4$
$-6y - 4y = 4 - 9$
$-10y = -5\ (-1)$
$10y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{10}$
$y = \frac{1}{2}$

$x = 3 - 2y$
$x = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2}$
$x = 3 - 1$
$x = 2$

V = $\left\{\left(2, \frac{1}{2} \right)\right\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Prove que os valores dados constituem a solução dos sistemas e escreva o conjunto verdade em $U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$:

Bloco 1

$x = 2$, $y = -2$; $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$	$x = 7$, $y = -1$; $\begin{cases} 2x - y = 15 \\ x + 5y = 2 \end{cases}$	$a = -2$, $b = -3$; $\begin{cases} a - b = 1 \\ 2a + b = -7 \end{cases}$
$\boxed{x} - 2\boxed{y} = 6$; $(2) - 2.(-2) = 6$; $2 + 4 = 6$; $6 = 6\,(v)$ — $2\boxed{x} + \boxed{y} = 2$; $2.(2) + (-2) = 2$; $4 - 2 = 2$; $2 = 2\,(v)$	$2\boxed{x} - \boxed{y} = 15$; $2.(7) - (-1) = 15$; $14 + 1 = 15$; $15 = 15\,(v)$ — $\boxed{x} + 5\boxed{y} = 2$; $(7) + 5.(-1) = 2$; $7 - 5 = 2$; $2 = 2\,(v)$	$\boxed{a} - \boxed{b} = 1$; $(-2) - (-3) = 1$; $-2 + 3 = 1$; $1 = 1\,(v)$ — $2\boxed{a} + \boxed{b} = -7$; $2.(-2) + (-3) = -7$; $-4 - 3 = -7$; $-7 = -7\,(v)$
V = {(2, -2)}	V = {(7, -1)}	V = {(-2, -3)}

Bloco 2

$x = \frac{1}{2}$, $y = -1$ $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$	$a = -5$, $b = \frac{2}{3}$ $\begin{cases} a + 3b = -3 \\ 2a + 9b = -4 \end{cases}$	$a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$ $\begin{cases} 2a - 4b = 2 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases}$
$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + (-1) = 0$; $1 - 1 = 0$; $0 = 0$ (V) | $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - (-1) = 3$; $2 + 1 = 3$; $3 = 3$ (V)	$(-5) + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = -3$; $-5 + 2 = -3$; $-3 = -3$ (V) | $2\cdot(-5) + 9\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = -4$; $-10 + 6 = -4$; $-4 = -4$ (V)	$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 2$; $1 + 1 = 2$; $2 = 2$ (V) | $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 1$; $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$; $1 = 1$ (V)
$V = \left\{\left(\frac{1}{2}, -1\right)\right\}$	$V = \left\{\left(-5, \frac{2}{3}\right)\right\}$	$V = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)\right\}$

b) Resolva os seguintes sistemas e indique o conjunto verdade ($U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$):

1) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ $V = \{(6, 4)\}$

2) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ $V = \{(3, -1)\}$

3) $\begin{cases} 2x + y = 25 \\ 3x - 2y = 20 \end{cases}$ $V = \{(10, 5)\}$

4) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ $V = \{(-1, -2)\}$

5) $\begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 15 \end{cases}$ $V = \{(6, 3)\}$

6) $\begin{cases} 2x = y \\ y + 4x = 3 \end{cases}$ $V = \{(\frac{1}{2}, 1)\}$

7) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y = 16 \end{cases}$ $V = \{(12, 4)\}$

8) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 6 = y \end{cases}$ $V = \{(-2, 2)\}$

9) $\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 8 \end{cases}$ $V = \{(6, 2)\}$

10) $\begin{cases} a + b = 12 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$ $V = \{(8, 4)\}$

11) $\begin{cases} a - 2b = 0 \\ a + b = 6 \end{cases}$ $V = \{(4, 2)\}$

12) $\begin{cases} x = y \\ x + y = 10 \end{cases}$ $V = \{(5, 5)\}$

Método da adição

De acordo com esse método, devem-se adicionar as duas equações membro a membro, de modo que uma das variáveis seja eliminada.

Observe o exemplo:

Determine o conjunto verdade, em $U = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, do sistema: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ \hline x + x + y - y = 5 + 1 \quad (+) \\ 2x = 6 \\ x = \frac{6}{2} \\ \boxed{x = 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{x} + y = 5 \\ 3 + y = 5 \\ y = 5 - 3 \\ \boxed{y = 2} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} \boxed{x} - y = 1 \\ 3 - y = 1 \\ -y = 1 - 3 \\ -y = -2 \ (-1) \\ \boxed{y = 2} \end{array}$$

Então: $V = \{(3, 2)\}$

a) Determine o conjunto verdade, em $U = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dos sistemas:

1) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$x + y = 8$
$x - y = 2$ (+)
$2x = 10$
$x = \frac{10}{2}$
$x = 5$

$x + y = 8$
$5 + y = 8$
$y = 8 - 5$
$y = 3$

ou

$x - y = 2$
$5 - y = 2$
$-y = 2 - 5$
$-y = -3\ (-1)$
$y = 3$

Então: V = {(5, 3)}

2) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$

$x + y = 10$
$x - y = 4$ (+)
$2x = 14$
$x = \frac{14}{2}$
$x = 7$

$x + y = 10$
$7 + y = 10$
$y = 10 - 7$
$y = 3$

ou

$x - y = 4$
$7 - y = 4$
$-y = 4 - 7$
$-y = -3\ (-1)$
$y = 3$

Então: V = {(7, 3)}

3) $\begin{cases} a + b = 8 \\ a - b = 4 \end{cases}$

$a + b = 8$
$a - b = 4$ (+)
$2a = 12$
$a = \frac{12}{2}$
$a = 6$

$a + b = 8$
$6 + b = 8$
$b = 8 - 6$
$b = 2$

ou

$a - b = 4$
$6 - b = 4$
$-b = 4 - 6$
$-b = -2\ (-1)$
$b = 2$

Então: V = {(6, 2)}

b) Determine o conjunto verdade, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dos sistemas:

1) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

$2x + y = 2$
$x - y = 4$ (+)
$3x = 6$
$x = \frac{6}{3}$
$x = 2$

$2x + y = 2$
$2 \cdot (2) + y = 2$
$4 + y = 2$
$y = 2 - 4$
$y = -2$

ou

$x - y = 4$
$2 - y = 4$
$-y = 4 - 2$
$-y = 2\ (-1)$
$y = -2$

Então: V = {(2, -2)}

2) $\begin{cases} 3a + b = -11 \\ 2a - b = -9 \end{cases}$

$3a + b = -11$
$2a - b = -9$ (+)
$5a = -20$
$a = \frac{-20}{5}$
$a = -4$

$3a + b = -11$
$3 \cdot (-4) + b = -11$
$-12 + b = -11$
$b = -11 + 12$
$b = 1$

ou

$2a - b = -9$
$2 \cdot (-4) - b = -9$
$-8 - b = -9$
$-b = -9 + 8$
$-b = -1\ (-1)$
$b = 1$

Então: V = { -4, 1 }

3) $\begin{cases} 4x + y = -6 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} 4x + y = -6 \\ x - y = 1 \quad (+) \\ \hline 5x = -5 \\ x = -\frac{5}{5} \\ x = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4x + y = -6 \\ 4.(-1) + y = -6 \\ -4 + y = -6 \\ y = -6 + 4 \\ y = -2 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} x - y = 1 \\ (-1) - y = 1 \\ -y = 1 + 1 \\ -y = 2 \ (-1) \\ y = -2 \end{array}$$

Então: V = ($-1, -2$)

c) Determine o conjunto verdade, em $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, dos sistemas:

1) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = -1 \quad (+) \\ \hline 2x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x + y = 2 \\ \frac{1}{2} + y = 2 \\ y = 2 - \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} x - y = -1 \\ \frac{1}{2} - y = -1 \\ -y = -1 - \frac{1}{2} \\ -y = -\frac{3}{2} \ (-1) \\ y = \frac{3}{2} \end{array}$$

Então: V = $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

2) $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 4a - b = 8 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} 2a + b = 1 \\ 4a - b = 8 \quad (+) \\ \hline 6a = 9 \\ a = \frac{9}{6} \\ a = \frac{3}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2a + b = 1 \\ 2.\left(\frac{3}{2}\right) + b = 1 \\ 3 + b = 1 \\ b = 1 - 3 \\ b = -2 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} 4a - b = 8 \\ 4.\left(\frac{3}{2}\right) - b = 8 \\ 6 - b = 8 \\ -b = 8 - 6 \\ -b = 2 \ (-1) \\ b = -2 \end{array}$$

Então: V = $\left\{\left(\frac{3}{2}, -2\right)\right\}$

d) Determine o conjunto verdade, em $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, dos sistemas:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 3y = 11 \quad (+) \\ \hline 6x = 12 \\ x = \frac{12}{6} \\ x = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2.x + 3y = 1 \\ 2.(2) + 3y = 1 \\ 4 + 3y = 1 \\ 3y = 1 - 4 \\ 3y = -3 \\ y = -1 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} 4x - 3y = 11 \\ 4.(2) - 3y = 11 \\ 8 - 3y = 11 \\ -3y = 11 - 8 \\ -3y = 3 \ (-1) \\ 3y = -3 \\ y = -1 \end{array}$$

Então: V = ($2, -1$)

2) $\begin{cases} 5a + 2b = 11 \\ a - 2b = 7 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} 5a + 2b = 11 \\ a - 2b = 7 \quad (+) \\ \hline 6a = 18 \\ a = \frac{18}{6} \\ a = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5a + 2b = 11 \\ 5.(3) + 2b = 11 \\ 15 + 2b = 11 \\ 2b = 11 - 15 \\ 2b = -4 \\ b = -\frac{4}{2} \\ b = -2 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} a - 2b = 7 \\ 3 - 2b = 7 \\ -2b = 7 - 3 \\ -2b = 4 \ (-1) \\ 2b = -4 \\ b = -\frac{4}{2} \\ b = -2 \end{array}$$

Então: V = ($3, -2$)

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva os sistemas pelo método da adição e indique o conjunto verdade em $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$:

1) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$ V = {(5, 4)}

2) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$ V = {(5, 2)}

3) $\begin{cases} a + b = 7 \\ a - b = 1 \end{cases}$ V = {(4, 3)}

4) $\begin{cases} 2a + b = 21 \\ 2a - b = 11 \end{cases}$ V = {(8, 5)}

5) $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ V = {(6, 4)}

6) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 3y = -16 \end{cases}$ V = {(-4, 4)}

7) $\begin{cases} 5a - 2b = 16 \\ 3a + 2b = 8 \end{cases}$ $V = \left\{\left(3, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

8) $\begin{cases} x + 5y = -6 \\ x - 5y = -4 \end{cases}$ $V = \left\{\left(-5, -\frac{1}{5}\right)\right\}$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Dos sistemas abaixo, assinale os que admitem V = {(2, 5)} em $U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$:

1. (X) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -3 \end{cases}$

2. (X) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

3. (   ) $\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

4. (X) $\begin{cases} x = 2y - 8 \\ y - x = 3 \end{cases}$

b) Dos sistemas abaixo, assinale os que admitem V = {(−1, 6)} em $U = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

1. (   ) $\begin{cases} 6x + y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases}$

2. (X) $\begin{cases} 2x - y = -8 \\ x + y = 5 \end{cases}$

3. (   ) $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

4. (X) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - 3y = -19 \end{cases}$

c) Dos sistemas abaixo, assinale os que admitem $V = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ em $U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$:

1. (X) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - y = -\frac{1}{6} \end{cases}$

2. (X) $\begin{cases} 6x - 4y = -1 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$

3. (   ) $\begin{cases} 9x + 6y = 6 \\ 3x - 6y = 2 \end{cases}$

d) Resolva os sistemas abaixo e indique o conjunto verdade em $U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, utilizando o método da adição ou o da substituição:

1) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x - 4y = 20 \end{cases}$ V = {(8, 1)}

2) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ V = {(6, 4)}

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ V = {(1, 1)}

4) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$ V = {(1, -1)}

5) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 8y = 0 \end{cases}$ V = {(8, 2)}

6) $\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 7x - 2y = 3 \end{cases}$ V = {(1, 2)}

7) $\begin{cases} 5x - 4y = 0 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$ V = {(4, 5)}

8) $\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ V = {(5, 7)}

9) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 3y = -18 \end{cases}$ V = {(3, 7)}

10) $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ V = {(3, 1)}

11) $\begin{cases} 3a - 4b = 2 \\ 7a - 9b = 7 \end{cases}$ V = {(10, 7)}

12) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$ $V = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

RAZÃO E PROPORÇÃO

NOÇÃO DE RAZÃO

Suponha que o professor de Educação Física de seu colégio tenha organizado um torneio de basquetebol com quatro equipes formadas pelos alunos da 6.ª série. Admita que o seu time foi o vencedor e que você, na partida decisiva, foi o "cestinha" com 40 pontos. Porém, para conseguir estes pontos você fez 60 arremessos. Então, em 60 arremessos você fez 40 pontos.

Vamos indicar, agora, a divisão:

Podemos dizer, então, que:

Razão é o quociente indicado (exato) entre dois números racionais, sendo que o segundo número é diferente de zero.

Como você pode perceber, uma razão é representada por uma fração. No entanto, não deve ser lida como se fosse um número racional. Observe o quadro abaixo:

Número racional (representado por fração)	**Razão** (representada por fração)
$\frac{1}{2}$ lê-se: um meio	$\frac{1}{2}$ lê-se: um para dois ou um está para dois
$\frac{3}{4}$ lê-se: três quartos	$\frac{3}{4}$ lê-se: três para quatro ou três está para quatro
$\frac{5}{3}$ lê-se: cinco terços	$\frac{5}{3}$ lê-se: cinco para três ou cinco está para três
$\frac{7}{10}$ lê-se: sete décimos	$\frac{7}{10}$ lê-se: sete para dez ou sete está para dez

Não se esqueça, então, que, por exemplo, $\frac{4}{5}$ é um numeral (fração) que representa o número racional "quatro quintos" e, também, a razão "quatro está para cinco".

Complete, indicando a leitura das seguintes razões:

1) $\frac{2}{3}$ lê-se: dois para três ou dois está para três

2) $\frac{1}{4}$ lê-se: um para quatro ou um está para quatro

3) $\frac{1}{5}$ lê-se: um para cinco ou um está para cinco

4) 5 : 7 lê-se: cinco para sete ou cinco está para sete

5) $\frac{4}{9}$ lê-se: quatro para nove ou quatro está para nove

6) $\frac{7}{5}$ lê-se: sete para cinco ou sete está para cinco

7) $\frac{9}{7}$ lê-se: nove para sete ou nove está para sete

8) 3 : 1 lê-se: três para um ou três está para um

9) $\frac{2}{9}$ lê-se: dois para nove ou dois está para nove

10) $\frac{10}{1}$ lê-se: dez para um ou dez está para um

11) 5 : 10 lê-se: cinco para dez ou cinco está para dez

Estabeleça a razão entre o primeiro e o segundo número:

1) 2 e 11 $\frac{2}{11}$ ou 2 : 11
2) 5 e 6 $\frac{5}{6}$ ou 5 : 6
3) 10 e 9 $\frac{10}{9}$ ou 10 : 9
4) 7 e 11 $\frac{7}{11}$ ou 7 : 11
5) 9 e 15 $\frac{9}{15}$ ou 9 : 15
6) 12 e 3 $\frac{12}{3}$ ou 12 : 3
7) 4 e 7 $\frac{4}{7}$ ou 4 : 7
8) 35 e 12 $\frac{35}{12}$ ou 35 : 12
9) 1 e 5 $\frac{1}{5}$ ou 1 : 5
10) 8 e 1 $\frac{8}{1}$ ou 8 : 1
11) 13 e 15 $\frac{13}{15}$ ou 13 : 15
12) 25 e 5 $\frac{25}{5}$ ou 25 : 5

OS TERMOS DE UMA RAZÃO: O ANTECEDENTE E O CONSEQÜENTE

Vamos considerar a notação $\frac{3}{5}$. O que ela representa?

A notação $\frac{3}{5}$ é um numeral (fração) que representa o número "três quintos", onde 3 é o **numerador**, e 5, o **denominador.** Porém, $\frac{3}{5}$ é a representação também da razão "três para cinco", onde 3 é o **antecedente**, e 5, o **conseqüente**.

Então:

Fração	Razão
$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$	$\frac{\text{antecedente}}{\text{conseqüente}}$

Complete as frases:

1) $\frac{4}{9}$ é uma fração, onde 4 é o numerador e 9 é o denominador.

2) $\frac{3}{7}$ é uma fração, onde 3 é o numerador e 7 é o denominador.

3) $\frac{7}{10}$ é uma razão, onde 7 é o antecedente e 10 é o conseqüente.

4) $\frac{13}{17}$ é uma razão, onde 13 é o antecedente e 17 é o conseqüente.

5) $\frac{1}{6}$ é uma razão, onde 1 é o antecedente e 6 é o conseqüente.

RAZÕES EQUIVALENTES

Você ainda está lembrado do torneio de basquetebol do qual você participou e foi o "cestinha" com 40 pontos em 60 arremessos? Pois bem, suponha que, no mesmo torneio, um de seus colegas de equipe tenha feito 20 pontos com 30 arremessos.

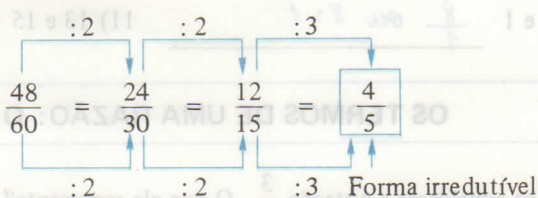
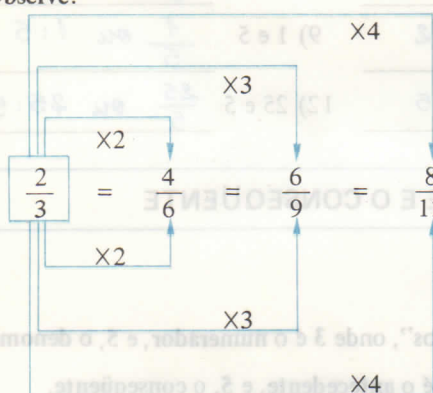
Note que você, em **60 arremessos**, conseguiu **40 pontos**. Nesse caso, temos a seguinte razão: $\frac{60}{40}$. Por outro lado, seu colega, em **30 arremessos**, conseguiu **20 pontos**. Temos, então, a razão: $\frac{30}{20}$. Como você pode perceber, a quantidade de arremessos e de pontos feitos pelo seu colega corresponde, exatamente, à metade dos seus. Portanto:

$\frac{60}{40}$ e $\frac{30}{20}$ são razões que se equivalem.

Para obter razões equivalentes, basta aplicar a propriedade fundamental, que é a seguinte:

> Ao multiplicar ou dividir os termos de uma razão por um mesmo número diferente de zero, obtém-se outra razão equivalente à primeira.

O sinal utilizado para indicar a equivalência entre duas razões é $\sim$. Entretanto, por facilidade, usa-se o sinal $=$ e costuma-se dizer **razões iguais** em lugar de razões equivalentes.

Observe:

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$, etc.

são razões equivalentes ou razões iguais.

$\frac{48}{60}, \frac{24}{30}, \frac{12}{15}, \frac{4}{5}$ são razões equivalentes ou razões iguais.

Dê as razões equivalentes à razão apresentada na forma irredutível:

1) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \ldots$

2) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \ldots$

3) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$

4) $\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{12}{21} = \frac{16}{28} = \ldots$

5) $\frac{5}{9} = \frac{10}{18} = \frac{15}{27} = \frac{20}{36} = \ldots$

6) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \ldots$

7) $\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \ldots$

8) $\frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{9}{30} = \frac{12}{40} = \ldots$

9) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \ldots$

10) $\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = \frac{21}{30} = \frac{28}{40} = \ldots$

11) $\frac{1}{8} = \frac{2}{16} = \frac{3}{24} = \frac{4}{32} = \ldots$

12) $\frac{4}{13} = \frac{8}{26} = \frac{12}{39} = \frac{16}{52} = \ldots$

Obtenha as razões equivalentes até atingir a forma irredutível:

1) $\frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ 2) $\frac{12}{30} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ 3) $\frac{30}{70} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

4) $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ 5) $\frac{72}{90} = \frac{36}{45} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ 6) $\frac{20}{60} = \frac{10}{30} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

7) $\frac{15}{60} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ 8) $\frac{30}{54} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$ 9) $\frac{28}{40} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

10) $\frac{48}{54} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$ 11) $\frac{56}{88} = \frac{28}{44} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$ 12) $\frac{66}{90} = \frac{33}{45} = \frac{11}{15}$

CÁLCULO DE RAZÕES

Para aprender a fazer cálculos com razões, vamos considerar os seguintes casos:

1.º caso: Qual é a razão entre os números racionais $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$?

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{5} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

Razão: seis para cinco.

Ache a razão entre os seguintes números racionais:

1) $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

2) $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{10}$ $\frac{2}{5} : \frac{3}{10} = \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$

3) 2 e $\frac{2}{5}$ $2 : \frac{2}{5} = 2 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{1}$

4) $\frac{3}{4}$ e 8 $\frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$

5) $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{15}$ $\frac{3}{5} : \frac{2}{15} = \frac{3}{5} \times \frac{15}{2} = \frac{9}{2}$

6) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$

7) 3 e $\frac{6}{7}$ $3 : \frac{6}{7} = 3 \times \frac{7}{6} = \frac{7}{2}$

8) $\frac{4}{9}$ e 6 $\frac{4}{9} : 6 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{27}$

9) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{10} : \frac{1}{5} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{1} = \frac{1}{2}$

10) $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{1} = \frac{3}{1}$

11) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$

12) $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{4} : \frac{2}{5} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{8}$

2.º caso: Qual é a razão entre os números 1,2 e $2\frac{1}{5}$?

$$\frac{1,2}{2\frac{1}{5}} = \boxed{1,2} : \boxed{2\frac{1}{5}} = \boxed{\frac{12}{10}} : \boxed{\frac{11}{5}} = \frac{12}{10} \times \frac{5}{11} = \boxed{\frac{6}{11}}$$

Razão: seis para onze.

Determine a razão entre os números:

1) $\frac{3}{4}$ e $1\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

2) $1\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{10}$ $\frac{6}{5} : \frac{1}{10} = \frac{6}{5} \times \frac{10}{1} = \frac{12}{1}$

3) $1\frac{1}{6}$ e $2\frac{5}{6}$ $\frac{7}{6} : \frac{17}{6} = \frac{7}{6} \times \frac{6}{17} = \frac{7}{17}$

4) 4 e 1,6 $4 : \frac{16}{10} = 4 \times \frac{10}{16} = \frac{5}{2}$

5) 0,8 e 2,4 $\frac{8}{10} : \frac{24}{10} = \frac{8}{10} \times \frac{10}{24} = \frac{1}{3}$

6) 2 e 0,5 $2 : \frac{5}{10} = 2 \times \frac{10}{5} = \frac{4}{1}$

7) 1,5 e 5 $\frac{15}{10} : 5 = \frac{15}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

8) 0,6 e $\frac{2}{5}$ $\frac{6}{10} : \frac{2}{5} = \frac{6}{10} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

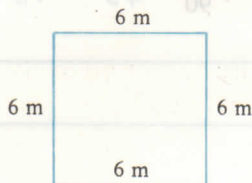
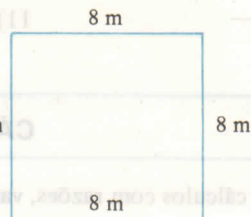
9) 1,8 e $1\frac{2}{9}$ $\frac{18}{10} : \frac{11}{9} = \frac{18}{10} \times \frac{9}{11} = \frac{162}{110} = \frac{81}{55}$

10) 7 e $3\frac{2}{4}$ $7 : \frac{14}{4} = 7 \times \frac{4}{14} = \frac{2}{1}$

11) $2\frac{3}{7}$ e $\frac{1}{7}$ $\frac{17}{7} : \frac{1}{7} = \frac{17}{7} \times \frac{7}{1} = \frac{17}{1}$

12) $2\frac{4}{5}$ e 0,1 $\frac{14}{5} : \frac{1}{10} = \frac{14}{5} \times \frac{10}{1} = \frac{28}{1}$

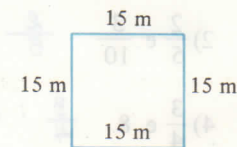
3.º caso: A medida do comprimento do lado de um quadrado é 6 m, e a de outro quadrado é 8 m. Determine a razão entre os perímetros desses quadrados.

8 m
8 m
8 m
8 m

Perímetro = 6 m + 6 m + 6 m + 6 m = 24 m

Perímetro = 8 m + 8 m + 8 m + 8 m = 32 m

Razão: $\frac{24 \text{ m}}{32 \text{ m}} = \frac{24}{32} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \boxed{\frac{3}{4}}$

4.ª caso: O lado de um quadrado mede 2 dam, e o de outro quadrado 15 m. Achar a razão entre as áreas desses quadrados.

15 m
15 m
15 m
15 m

2 dam ⟺ 20 m

> A razão entre duas grandezas de mesma espécie é igual ao quociente indicado de suas medidas, consideradas na mesma unidade de medida.

$A = \ell^2 = (20 \text{ m})^2 = 400 \text{ m}^2$

$A = \ell^2 = (15 \text{ m})^2 = 225 \text{ m}^2$

Razão: $\frac{400 \text{ m}^2}{225 \text{ m}^2} = \frac{400}{225} = \frac{80}{45} = \boxed{\frac{16}{9}}$

AGORA FAÇA ALGUNS EXERCÍCIOS

a) Determine a razão entre:

1) 14 m e 21 m $\frac{14 \text{ m}}{21 \text{ m}} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

2) 2,5 dam e 30 m $\frac{25 \text{ m}}{30 \text{ m}} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

3) 0,12 dam² e 6 m² $\frac{12 \text{ m}^2}{6 \text{ m}^2} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$

4) 0,018 m³ e 24 dm³ $\frac{18 \text{ dm}^3}{24 \text{ dm}^3} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

5) 1,5 kl e 9 hl $\frac{15 \text{ hl}}{9 \text{ hl}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

6) 12 kg e 3 000 dag $\frac{12 \text{ kg}}{30 \text{ kg}} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

7) 16 cm e 0,28 m $\frac{16 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

8) 1 800 g e 300 dag $\frac{180 \text{ dag}}{300 \text{ dag}} = \frac{180}{300} = \frac{3}{5}$

9) 48 mm² e 0,0064 dm² $\frac{48 \text{ mm}^2}{64 \text{ mm}^2} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$

10) 20 a e 0,5 ha $\frac{20 \text{ a}}{50 \text{ a}} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

b) Resolva estes problemas:

1) Você tem 12 anos de idade, e o seu irmão mais velho tem 18 anos. Qual é a razão entre a sua idade e a de seu irmão?

$\frac{12 \text{ anos}}{18 \text{ anos}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

2) O perímetro de um triângulo é 28 m, e o lado de um quadrado mede 0,09 hm. Determine a razão entre os perímetros dessas figuras.

$\frac{28\ m}{36\ m} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$

3) Determine a razão entre o número de meninas e o de meninos de sua classe.

4) Sabendo que você "pesa" 3 500 dag, e um de seus colegas "pesa" 40 kg, qual é a razão entre o seu peso e o de seu colega?

3 500 dag ⟺ 35 kg $\quad \frac{35\ kg}{40\ kg} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$

5) Num jogo de basquete entre os alunos da sua classe, você fez 16 pontos, e um de seus colegas do time adversário fez 36 pontos. Qual é a razão entre o número de pontos feitos por você e por seu colega?

$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

6) Qual é a razão entre 2 dias e uma semana?

Uma semana ⟺ 7 dias $\quad \frac{2\ dias}{7\ dias} = \frac{2}{7}$

7) Determine a razão entre 1 trimestre e 1 ano.

1 trimestre ⟺ 3 meses
1 ano ⟺ 12 meses $\quad \frac{3\ meses}{12\ meses} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

8) Qual é a razão entre 1 minuto e 24 segundos?

1 minuto ⟺ 60 segundos $\quad \frac{60\ segundos}{24\ segundos} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$

9) Qual é a razão entre os números de elementos dos conjuntos A = {meses do ano} e B = {signos do Zodíaco}?

conjunto A : 12 elementos
conjunto B : 12 elementos $\quad \frac{12}{12} = \frac{1}{1}$

10) Sabendo que A = {pontos cardeais} e B = {estações do ano}, determine a razão entre o número de elementos desses conjuntos.

conjunto A : 4 elementos
conjunto B : 4 elementos $\quad \frac{4}{4} = \frac{1}{1}$

RAZÕES INVERSAS

Considere o problema:

Numa fábrica existem 800 funcionários, dos quais 320 são homens. Determine a razão entre o número de homens e o de mulheres.

$$\frac{\text{número de homens}}{\text{número de mulheres}} = \frac{320}{480} = \frac{2}{3} \quad (:160)$$

Considerando essa mesma fábrica, qual é a razão entre o número de mulheres e o de homens?

$$\frac{\text{número de mulheres}}{\text{número de homens}} = \frac{480}{320} = \frac{3}{2} \quad (:160)$$

As razões obtidas, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$, são chamadas de **razões inversas**.

Duas razões são inversas quando o antecedente de uma é o conseqüente da outra e vice-versa.

Em conseqüência dessa definição, temos:

- O produto de duas razões inversas é sempre 1.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$$

- A razão cujo antecedente é zero não possui a inversa.

$\frac{0}{2}$ $\quad$ $\frac{2}{0}$?

Dê a razão inversa de:

1) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$ 3) $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$ 4) $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{5}$

5) $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{3}$ 6) $\frac{3}{10}$, $\frac{10}{3}$ 7) $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{x}$ 8) $\frac{m}{n}$, $\frac{n}{m}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete adequadamente:

1) $\frac{2}{3}$ é uma notação que representa um *número racional* e também uma *razão*.

2) Os termos de uma fração são: *numerador* e *denominador*.

3) Os termos de uma razão são: *antecedente* e *conseqüente*.

4) $\frac{3}{11}$ lê-se: *três onze avos* ou *três para onze*.

5) $\frac{11}{100}$ lê-se: *onze centésimos* ou *onze para cem*.

6) A razão entre os números:

11 e 23 é indicada por $\frac{11}{23}$ ou $11 : 23$

15 e 29 é indicada por $\frac{15}{29}$ ou $15 : 29$

10 e 9 é indicada por $\frac{10}{9}$ ou $10 : 9$

7) A razão inversa de $\frac{11}{5}$ é $\frac{5}{11}$.

b) Resolva os problemas:

1) Qual é a razão entre uma hora e 45 minutos?

Uma hora $\Longleftrightarrow$ *60 minutos* $\quad \frac{60}{45} = \frac{4}{3}$

2) Qual é a razão entre uma semana e uma quinzena?

Uma semana ⟺ 7 dias $\frac{7}{15}$
Uma quinzena ⟺ 15 dias

3) Considerando A = {cores da bandeira brasileira} e B = {planetas do sistema solar}, qual é a razão entre os números de elementos dos conjuntos A e B?

Número de elementos de A: 4 $\frac{4}{9}$
Número de elementos de B: 9

4) Num colégio existem 1 200 alunos, dos quais 720 são meninas. Determine a razão entre:

a) o número de alunos e o de meninas: $\frac{1200}{720} = \frac{5}{3}$

b) o número de meninos e o de meninas: $\frac{480}{720} = \frac{2}{3}$

NOÇÃO DE PROPORÇÃO:

Você se lembra do jogo de basquete do qual participou? Pois bem, nesse jogo você fez 60 arremessos e conseguiu 40 pontos, e seu colega, em 30 arremessos, fez 20 pontos. Portanto, a razão entre o número de arremessos e o de pontos que você fez é de $\frac{60}{40}$, e a razão entre o número de arremessos e o de pontos feitos por seu colega é de $\frac{30}{20}$.

Como já vimos, as razões $\frac{60}{40}$ e $\frac{30}{20}$ são equivalentes, pois $\frac{60}{40} \overset{:2}{=} \frac{30}{20}$.

A sentença que representa uma igualdade entre duas razões equivalentes constitui uma **proporção**.

Então, $\frac{60}{40} = \frac{30}{20}$ é uma proporção que se lê: **sessenta está para quarenta, assim como trinta está para vinte.**

Dê a leitura das proporções:

1) $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ ou $3 : 2 = 6 : 4$ Três está para dois, assim como seis está para quatro.

2) $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$ ou $4 : 5 = 8 : 10$ Quatro está para cinco, assim como oito está para dez.

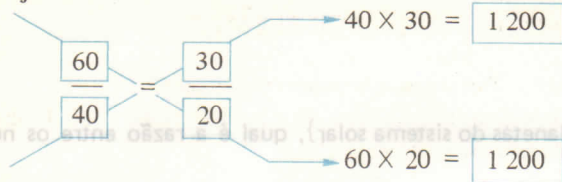
3) $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ ou $12 : 15 = 4 : 5$ Doze está para quinze, assim como quatro está para cinco.

4) $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ ou $a : b = x : y$ a está para b, assim como x está para y.

COMO RECONHECER UMA PROPORÇÃO?

Para reconhecer uma proporção, basta aplicar a seguinte propriedade fundamental:

Numa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Veja:

$40 \times 30 = 1\,200$

meios

ou $60 : 40 = 30 : 20$

extremos

$60 \times 20 = 1\,200$

Extremos: São considerados extremos o antecedente da primeira razão e o conseqüente da segunda razão.

Meios: São considerados meios o conseqüente da primeira razão e o antecedente da segunda razão.

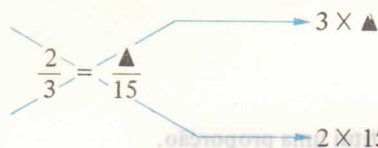
Coloque no □ o sinal = se as razões constituem uma proporção, ou o sinal ≠ se elas não constituem uma proporção:

1) $\frac{5}{3}$ [=] $\frac{15}{9}$ 2) $\frac{10}{15}$ [=] $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{3}{4}$ [≠] $\frac{6}{9}$ 4) $\frac{4}{11}$ [≠] $\frac{3}{10}$

5) $\frac{2}{5}$ [=] $\frac{8}{20}$ 6) $\frac{1}{6}$ [=] $\frac{6}{36}$ 7) $\frac{7}{10}$ [=] $\frac{21}{30}$ 8) $\frac{2}{9}$ [=] $\frac{10}{45}$

9) $\frac{12}{32}$ [≠] $\frac{1}{3}$ 10) $\frac{10}{25}$ [=] $\frac{8}{20}$ 11) $\frac{18}{21}$ [≠] $\frac{5}{7}$ 12) $\frac{5}{10}$ [=] $\frac{1}{2}$

COMO DESCOBRIR UM TERMO DESCONHECIDO NUMA PROPORÇÃO?

Para descobrir um termo desconhecido numa proporção, é suficiente aplicar a propriedade fundamental. Observe:

Então, $3 \times ▲ = 2 \times 15$

$3 \times ▲ = 30 \Longrightarrow ▲ = 30 : 3$

$▲ = 10$

Chamando de x o termo desconhecido, descubra o seu valor, ~~aplicando a propriedade fundamental:~~

1) $\frac{3}{5} = \frac{x}{20}$
$5 \cdot x = 3 \cdot 20$
$5x = 60 \Leftrightarrow x = 60 : 5$
$x = 12$

2) $\frac{4}{7} = \frac{12}{x}$
$4 \cdot x = 7 \cdot 12$
$4x = 84 \Leftrightarrow x = 84 : 4$
$x = 21$

3) $\frac{x}{24} = \frac{5}{8}$
$8 \cdot x = 24 \cdot 5$
$8x = 120 \Leftrightarrow x = 120 : 8$
$x = 15$

4) $\frac{6}{x} = \frac{24}{28}$
$24 \cdot x = 6 \cdot 28$
$24x = 168 \Leftrightarrow x = 168 : 24$
$x = 7$

5) $\frac{1}{4} = \frac{x}{16}$
$4 \cdot x = 1 \cdot 16$
$4x = 16 \Leftrightarrow x = 16 : 4$
$x = 4$

6) $\frac{3}{10} = \frac{9}{x}$
$3 \cdot x = 10 \cdot 9$
$3x = 90 \Leftrightarrow x = 90 : 3$
$x = 30$

7) $\frac{x}{45} = \frac{5}{9}$
$9 \cdot x = 45 \cdot 5$
$9x = 225 \Leftrightarrow x = 225 : 9$
$x = 25$

8) $\frac{48}{x} = \frac{12}{5}$
$12 \cdot x = 48 \cdot 5$
$12x = 240 \Leftrightarrow x = 240 : 12$
$x = 20$

9) $\frac{2}{3} = \frac{x}{18}$
$3 \cdot x = 2 \cdot 18$
$3x = 36 \Leftrightarrow x = 36 : 3$
$x = 12$

Sendo a o termo desconhecido, descubra o seu valor, aplicando a propriedade fundamental:

1) $2 : 3 = 8 : a$
$\frac{2}{3} = \frac{8}{a}$ $2a = 24$
$a = 24 : 2 = 12$

2) $5 : 7 = 20 : a$
$\frac{5}{7} = \frac{20}{a}$ $5a = 140$
$a = 140 : 5 = 28$

3) $13 : a = 39 : 6$
$\frac{13}{a} = \frac{39}{6}$ $39a = 78$
$a = 78 : 39 = 2$

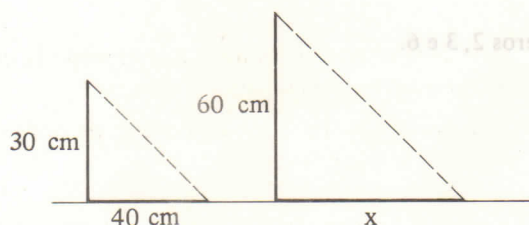
4) $11 : 3 = a : 6$
$\frac{11}{3} = \frac{a}{6}$ $3a = 66$
$a = 66 : 3 = 22$

5) $a : 13 = 14 : 26$
$\frac{a}{13} = \frac{14}{26}$ $26a = 182$
$a = 182 : 26 = 7$

6) $18 : 27 = a : 3$
$\frac{18}{27} = \frac{a}{3}$ $27a = 54$
$a = 54 : 27 = 2$

O EMPREGO DA PROPORÇÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vamos aprender agora a resolver problemas utilizando a proporção. Considere o seguinte problema:

Uma vara de 30 cm fincada verticalmente no solo produz, numa determinada hora do dia, uma sombra de 40 cm. Se a vara possuir 60 cm, qual será o comprimento de sua sombra, nas mesmas condições?

$$\frac{30}{40} = \frac{60}{x} \Longrightarrow 30 \cdot x = 40 \cdot 60$$
$$30 \cdot x = 2\,400 \Longleftrightarrow x = 2\,400 : 30$$
$$x = 80$$

Resposta: 80 cm.

Agora resolva estes problemas:

1) Você fincou verticalmente no solo uma vara de 8 cm, a qual produziu uma sombra de 6 cm. Quanto medirá o comprimento da sombra produzida por uma vara de 40 cm?

$\frac{8 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{40 \text{ cm}}{x}$ $8 \cdot x = 6 \cdot 40$

$8x = 240 \Longleftrightarrow x = 240 : 8$

$x = 30 \text{ cm}$

Resposta: 30 cm.

2) Uma vara de 12 cm fincada verticalmente no solo produz uma sombra de 15 cm. Quanto deve medir o comprimento de uma vara para que ela produza uma sombra de 45 cm?

$\frac{12 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \frac{x}{45 \text{ cm}}$ $15 \cdot x = 12 \cdot 45$

$15x = 540 \Longleftrightarrow x = 540 : 15$

$x = 36 \text{ cm}$

Resposta: 36 cm.

3) Em determinada hora do dia, uma vara de 2 m, fincada verticalmente no solo, produz uma sombra de 3 m. Qual é a altura de um prédio cuja sombra mede 0,6 hm na mesma hora do dia?

$\frac{2 \text{ m}}{3 \text{ m}} = \frac{x}{60 \text{ m}}$ $3 \cdot x = 2 \cdot 60$

$3x = 120 \Longleftrightarrow x = 120 : 3$

$x = 40 \text{ m}$

Resposta: 40 m.

4) Você tem uma fotografia com as seguintes dimensões: 3 cm de largura e 4 cm de comprimento. Se você ampliar esta fotografia, de modo que a medida de seu comprimento passe a ser 28 cm, quanto medirá sua largura?

$\frac{3 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = \frac{x}{28 \text{ cm}}$ $4 \cdot x = 3 \cdot 28$

$4x = 84 \Longleftrightarrow x = 84 : 4$

$x = 21 \text{ cm}$

Resposta: 21 cm.

5) Na planta de uma casa, as dimensões da sala são: 6 cm de largura e 10 cm de comprimento. Ao construir a casa, a sala ficou com uma largura de 4,5 m. Qual a medida do comprimento desta sala?

$\frac{6 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = \frac{4{,}5 \text{ cm}}{x}$ $6 \cdot x = 10 \cdot 4{,}5$

$6x = 45 \Longleftrightarrow x = 45 : 6$

$x = 7{,}5 \text{ m}$

Resposta: 7,5 m.

O QUARTO TERMO DE UMA PROPORÇÃO: A QUARTA PROPORCIONAL

Observe a proporção:

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{\boxed{9}} \quad \text{ou} \quad 2:3 = 6:\boxed{9}$$

9 é a **quarta proporcional** dos números 2, 3 e 6.

Consideremos um problema:

Qual é a quarta proporcional dos números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$?

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{4} : x \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{x}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \qquad \frac{1}{2} \cdot x$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{12} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{12} : \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{1}$$

$$x = \frac{1}{6}$$

Como você pode notar, a quarta proporcional dos números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ é $\frac{1}{6}$.

Ache a quarta proporcional dos números:

1) 2, 3 e 4

2) 5, 8 e 15

3) 1, 2 e 5

4) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{5}$

5) $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$

6) 1,2, 0,5 e $\frac{1}{5}$

UMA PROPORÇÃO ESPECIAL: A PROPORÇÃO CONTÍNUA

Examine esta proporção:

$$\frac{4}{8} = \frac{8}{16} \quad \text{ou} \quad \boxed{4} : \boxed{8} = \boxed{8} : \boxed{16}$$

meios

extremos

Note que, nessa proporção, os meios são iguais. Pois bem, uma proporção que apresenta os meios iguais recebe o nome de **proporção contínua**.

O QUARTO TERMO DE UMA PROPORÇÃO CONTÍNUA: A TERCEIRA PROPORCIONAL

Considere o problema:

Descubra o valor de x na proporção: $\frac{4}{10} = \frac{x}{25}$.

A proporção é $\frac{4}{10} = \frac{10}{25}$ ou 4 : 10 = 10 : 25. Veja que os meios são iguais. Então, esta proporção é uma proporção contínua.

4 : 10 = 10 : 25

meios iguais — 25 é a terceira proporcional dos números 4 e 10.

Ache a terceira proporcional dos números:

1) 1 e 2

$\frac{1}{2} = \frac{2}{x}$ $1 \cdot x = 4$ $x = 4 : 1 = 4$

2) 2 e 4

$\frac{2}{4} = \frac{4}{x}$ $2 \cdot x = 16$ $x = 16 : 2$ $x = 8$

3) 3 e 6

$\frac{3}{6} = \frac{6}{x}$ $3 \cdot x = 36$ $x = 36 : 3$ $x = 12$

4) 4 e 12

$\frac{4}{12} = \frac{12}{x}$ $4 \cdot x = 144$ $x = 144 : 4$ $x = 36$

5) 8 e 20

$\frac{8}{20} = \frac{20}{x}$ $8 \cdot x = 400$ $x = 400 : 8$ $x = 50$

6) 8 e 16

$\frac{8}{16} = \frac{16}{x}$ $8 \cdot x = 256$ $x = 256 : 8$ $x = 32$

7) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{5}$

$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{x}$ $\frac{1}{10} \cdot x = \frac{1}{25}$ $x = \frac{1}{25} : \frac{1}{10} = \frac{1}{25} \times \frac{10}{1}$ $x = \frac{2}{5}$

8) $\frac{5}{12}$ e $\frac{2}{3}$

$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{x}$ $\frac{5}{12} \cdot x = \frac{4}{9}$ $x = \frac{4}{9} : \frac{5}{12} = \frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5}$ $x = \frac{16}{15}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete adequadamente:

1) Na proporção $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$, 2 e 21 são os extremos, 7 e 6 são os meios.

2) $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ lê-se: três está para quatro, assim como quinze está para vinte.

3) Numa proporção, os produtos dos meios e dos extremos são iguais. Esta afirmação corresponde à propriedade fundamental.

4) Quando os meios de uma proporção são iguais, ela é chamada de proporção contínua.

5) O quarto termo de uma proporção chama-se quarta proporcional. Entretanto, se a proporção for contínua, o quarto termo recebe o nome de terceira proporcional.

b) Coloque, nas seguintes proporções, os termos que faltam:

1) $\frac{5}{7} = \frac{25}{35}$ 2) $\frac{6}{11} = \frac{24}{44}$ 3) $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$ 4) $\frac{9}{13} = \frac{45}{65}$

5) $\frac{6}{18} = \frac{18}{54}$ 6) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ 7) $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ 8) $\frac{9}{15} = \frac{27}{45}$

c) Complete as proporções contínuas:

1) $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ 2) $\frac{45}{30} = \frac{30}{20}$ 3) $8 : 16 = 16 : 32$

4) $4 : 8 = 8 : 16$ 5) $\frac{16}{20} = \frac{20}{25}$ 6) $\frac{18}{12} = \frac{12}{8}$

d) Descubra a quarta proporcional dos números:

1) 4, 5 e 8 (10) 2) 14, 16 e 21 (24) 3) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ (1)

4) 0,1, 0,3 e 0,5 (1,5) 5) 2, 4 e 6 (12) 6) 3, 5 e 1 $\left(\frac{5}{3}\right)$

7) 7, 11 e 14 (22) 8) 9, 10 e 27 (30) 9) 7, 8 e 3,5 (4)

e) Determine a terceira proporcional dos números:

1) 16 e 4 (1) 2) 9 e 6 (4) 3) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\right)$

4) 16 e 24 (36) 5) 3 e 12 (48) 6) 9 e 12 (16)

7) 9 e 18 (36) 8) 4 e 22 (121) 9) $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{6}$ $\left(\frac{1}{24}\right)$

f) Resolva os problemas:

1) O antecedente de uma razão é 6. Determine o seu conseqüente, sabendo que ela forma uma proporção com a razão $\frac{42}{49}$. (7)

2) O conseqüente de uma razão é 40. Descubra o seu antecedente, sabendo que ela forma uma proporção com a razão $\frac{24}{60}$. (16)

3) O antecedente de uma razão é 2. Qual é o seu conseqüente, sabendo que ela forma uma proporção contínua com outra razão, cujo conseqüente é 18? (6)

4) Você possui uma foto com as seguintes dimensões: largura, 18 cm, e comprimento, 24 cm. Esta foto foi obtida, por ampliação, de uma outra cuja largura é 3 cm. Determine o comprimento da foto original. (4 cm)

AS TRANSFORMADAS DE UMA PROPORÇÃO: A PERMUTAÇÃO E A INVERSÃO

Dada uma proporção, pode-se, com os mesmos números, obter outras proporções que recebem o nome de **transformadas da proporção.**

Como obter as transformadas de: $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$?

Permutando-se os extremos, obtém-se uma outra proporção. → $\frac{18}{3} = \frac{12}{2}$

$\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ Permutando-se os meios, obtém-se uma outra proporção. → $\frac{2}{12} = \frac{3}{18}$

$\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ Com as razões inversas, obtém-se uma outra proporção. → $\frac{3}{2} = \frac{18}{12}$

Obtenha as transformadas das proporções através da permutação e da inversão:

1) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ $\quad \frac{15}{5} = \frac{6}{2} \quad \frac{2}{6} = \frac{5}{15} \quad \frac{5}{2} = \frac{15}{6}$

2) $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ $\quad \frac{24}{8} = \frac{9}{3} \quad \frac{3}{9} = \frac{8}{24} \quad \frac{8}{3} = \frac{24}{9}$

3) $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$ $\quad \frac{7}{35} = \frac{4}{20} \quad \frac{20}{4} = \frac{35}{7} \quad \frac{35}{20} = \frac{7}{4}$

4) $\frac{25}{45} = \frac{5}{9}$ $\quad \frac{9}{45} = \frac{5}{25} \quad \frac{25}{5} = \frac{45}{9} \quad \frac{45}{25} = \frac{9}{5}$

OUTRAS TRANSFORMADAS ENVOLVENDO OPERAÇÕES

Vamos ver como se obtêm as transformadas de uma proporção, envolvendo as operações: adição, subtração e multiplicação entre seus termos.

Adição dos termos da mesma razão

Observe como podemos obter as transformadas da proporção $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ através da **adição dos termos da mesma razão.**

$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$\frac{10+6}{6} = \frac{5+3}{3}$, **ou seja,** $\frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$\frac{10+6}{10} = \frac{5+3}{5}$, **ou seja,** $\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

Obtenha, através desse método, as transformadas das proporções abaixo:

1) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$\frac{3+4}{4} = \frac{9+12}{12}$

$\frac{3+4}{3} = \frac{9+12}{9}$

2) $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

$\frac{8+20}{20} = \frac{2+5}{5}$

$\frac{8+20}{8} = \frac{2+5}{2}$

3) $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$

$\frac{3+7}{7} = \frac{15+35}{35}$

$\frac{3+7}{3} = \frac{15+35}{15}$

As proporções transformadas são muito úteis na resolução de problemas. Veja um exemplo:

Determine dois números, de modo que a razão entre eles seja $\frac{2}{5}$, e a soma deles, 35.

Vamos representar esses números por x e y. Então, temos:

$\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ e $x + y = 35$

$\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$

$\frac{x+y}{y} = \frac{2+5}{5}$ Logo, $\frac{35}{y} = \frac{7}{5} \Rightarrow 7 \cdot y = 35 \cdot 5 \Rightarrow 7 \cdot y = 175$

$y = 175 : 7 = 25$

$\frac{x+y}{x} = \frac{2+5}{2}$ Logo, $\frac{35}{x} = \frac{7}{2} \Rightarrow 7 \cdot x = 35 \cdot 2 \Rightarrow 7 \cdot x = 70$

$x = 70 : 7 = 10$

Resposta: Os números são: 10 e 25.

AGORA RESOLVA VOCÊ MESMO

1) A soma de dois números é 50, e a razão entre eles é $\frac{3}{7}$. Determine esses números.

$x + y = 50$ e $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$

$\frac{x+y}{y} = \frac{3+7}{7}$ Logo, $\frac{50}{y} = \frac{10}{7} \Rightarrow 10y = 350 \Rightarrow y = 350 : 10 = 35$

$\frac{x+y}{x} = \frac{3+7}{3}$ Logo, $\frac{50}{x} = \frac{10}{3} \Rightarrow 10x = 150 \Rightarrow x = 150 : 10 = 15$

Resposta: Os números são 15 e 35.

2) Qual é a fração equivalente a $\frac{3}{8}$ cuja soma de seus termos é 44?

$\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$ e $x + y = 44$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$

$\frac{x+y}{y} = \frac{3+8}{8}$ Logo, $\frac{44}{y} = \frac{11}{8} \Rightarrow 11y = 352 \Rightarrow y = 352 : 11 = 32$

$\frac{x+y}{x} = \frac{3+8}{3}$ Logo, $\frac{44}{x} = \frac{11}{3} \Rightarrow 11x = 132 \Rightarrow x = 132 : 11 = 12$

Resposta: $\frac{12}{32}$.

3) A soma dos perímetros de dois quadrados é 52 m. Determine esses perímetros, sabendo que a razão entre eles é de $\frac{3}{10}$.

$x + y = 52$ e $\frac{x}{y} = \frac{3}{10}$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{10}$

$\frac{x+y}{y} = \frac{3+10}{10}$ Logo, $\frac{52}{y} = \frac{13}{10} \Rightarrow 13y = 520 \Rightarrow y = 520 : 13 = 40$

$\frac{x+y}{x} = \frac{3+10}{3}$ Logo, $\frac{52}{x} = \frac{13}{3} \Rightarrow 13x = 156 \Rightarrow x = 156 : 13 = 12$

Resposta: 12 m e 40 m.

Subtração dos termos da mesma razão

Note:

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{10-6}{6} = \frac{5-3}{3}, \text{ ou seja, } \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{10-6}{10} = \frac{5-3}{5}, \text{ ou seja, } \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Obtenha as transformadas através do método da subtração dos termos da mesma razão:

1) $\frac{21}{15} = \frac{7}{5}$

$\frac{21-15}{15} = \frac{7-5}{5}$

$\frac{21-15}{21} = \frac{7-5}{7}$

2) $\frac{8}{3} = \frac{32}{12}$

$\frac{8-3}{3} = \frac{32-12}{12}$

$\frac{8-3}{8} = \frac{32-12}{32}$

3) $\frac{27}{21} = \frac{9}{7}$

$\frac{27-21}{21} = \frac{9-7}{7}$

$\frac{27-21}{27} = \frac{9-7}{9}$

4) $\frac{10}{3} = \frac{50}{15}$

$\frac{10-3}{3} = \frac{50-15}{15}$

$\frac{10-3}{10} = \frac{50-15}{50}$

Veja agora a aplicação dessas transformadas na resolução de problemas. Vamos considerar então o seguinte problema:

A diferença entre dois números é 21 e eles estão na razão de $\frac{11}{4}$. Quais são estes números?

$x - y = 21$ e $\frac{x}{y} = \frac{11}{4}$

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{11}{4}} \Rightarrow \frac{x-y}{y} = \frac{11-4}{4} \quad \text{Logo, } \frac{21}{y} = \frac{7}{4} \Rightarrow 7 \cdot y = 21 \cdot 4 \Rightarrow 7y = 84$$

$$y = 84 : 7 = 12$$

$$\frac{x-y}{x} = \frac{11-4}{11} \quad \text{Logo, } \frac{21}{x} = \frac{7}{11} \Rightarrow 7 \cdot x = 21 \cdot 11 \Rightarrow 7x = 231$$

$$x = 231 : 7 = 33$$

Resposta: Os números são 33 e 12.

AGORA RESOLVA VOCÊ MESMO

1) A razão entre dois números é $\frac{12}{5}$. Determine esses números, sabendo que a diferença entre eles é 35.

$\frac{x}{y} = \frac{12}{5}$ e $x - y = 35$

$\frac{x}{y} = \frac{12}{5}$ → $\frac{x-y}{y} = \frac{12-5}{5}$ logo, $\frac{35}{y} = \frac{7}{5} \Rightarrow 7y = 175 \Rightarrow y = 175 : 7 = 25$

$\frac{x-y}{x} = \frac{12-5}{12}$ logo, $\frac{35}{x} = \frac{7}{12} \Rightarrow 7x = 420 \Rightarrow x = 420 : 7 = 60$

Resposta: Os números são 60 e 25.

2) Determine a fração equivalente a $\frac{6}{5}$, cuja diferença entre seus termos é 7.

$\frac{x}{y} = \frac{6}{5}$ e $x - y = 7$

$\frac{x}{y} = \frac{6}{5}$ → $\frac{x-y}{y} = \frac{6-5}{5}$ logo, $\frac{7}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = 35$

$\frac{x-y}{x} = \frac{6-5}{6}$ logo, $\frac{7}{x} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 42$

Então, a fração é $\frac{42}{35}$.

Resposta: $\frac{42}{35}$.

3) Considere dois quadrados cujos perímetros estão na razão $\frac{9}{5}$. Sabendo que a diferença entre esses perímetros é de 16 m, quanto medem os lados de cada quadrado?

$\frac{x}{y} = \frac{9}{5}$ e $x - y = 16$

$\frac{x}{y} = \frac{9}{5}$ → $\frac{x-y}{y} = \frac{9-5}{5}$ logo, $\frac{16}{y} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = 20$

$\frac{x-y}{x} = \frac{9-5}{9}$ logo, $\frac{16}{x} = \frac{4}{9} \Rightarrow x = 36$

Então, os lados medem 9 m e 5 m.

Resposta: 9 m e 5 m.

Adição dos antecedentes e conseqüentes das duas razões

Observe:

$$\boxed{\frac{10}{6} = \frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{\frac{10+5}{6+3} = \frac{10}{6}}, \text{ ou seja, } \frac{15}{9} = \frac{10}{6}$$

$$\boxed{\frac{10+5}{6+3} = \frac{5}{3}}, \text{ ou seja, } \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

Obtenha as transformadas por meio da adição dos antecedentes e conseqüentes:

1) $\frac{7}{3} = \frac{21}{9}$

$\frac{7+21}{3+9} = \frac{7}{3}$

$\frac{7+21}{3+9} = \frac{21}{9}$

2) $\frac{36}{40} = \frac{9}{10}$

$\frac{36+9}{40+10} = \frac{36}{40}$

$\frac{36+9}{40+10} = \frac{9}{10}$

3) $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$

$\frac{5+25}{8+40} = \frac{5}{8}$

$\frac{5+25}{8+40} = \frac{25}{40}$

4) $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

$\frac{24+3}{16+2} = \frac{24}{16}$

$\frac{24+3}{16+2} = \frac{3}{2}$

Observe agora como podemos resolver problemas com o auxílio dessas transformadas.

Dada a proporção $\frac{a}{5} = \frac{b}{6}$, determine os números a e b, sabendo que a + b = 44.

$\frac{a}{5} = \frac{b}{6}$

$\frac{a+b}{5+6} = \frac{a}{5}$ Logo, $\frac{44}{11} = \frac{a}{5} \Rightarrow 11 \cdot a = 44 \cdot 5 \Rightarrow 11a = 220$

$a = 220 : 11 = 20$

$\frac{a+b}{5+6} = \frac{b}{6}$ Logo, $\frac{44}{11} = \frac{b}{6} \Rightarrow 11 \cdot b = 44 \cdot 6 \Rightarrow 11b = 264$

$b = 264 : 11 = 24$

Resposta: Os números são 20 e 24.

AGORA RESOLVA VOCÊ MESMO

1) A soma de dois números x e y é 35. Determine estes números, sabendo que x está para 3, assim como y está para 4.

$x + y = 35$

$\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ $\quad \frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ $\quad \frac{x+y}{3+4} = \frac{x}{3}$ logo, $\frac{35}{7} = \frac{x}{3} \Longrightarrow x = 15$

$\frac{x+y}{3+4} = \frac{y}{4}$ logo, $\frac{35}{7} = \frac{y}{4} \Longrightarrow y = 20$

Resposta: Os números são 15 e 20.

2) A idade de um filho está para 2, assim como a idade de seu pai está para 10. Ache essas idades, sabendo que a soma delas é 54.

$\frac{x}{2} = \frac{y}{10}$

$x + y = 54$ $\quad \frac{x}{2} = \frac{y}{10}$ $\quad \frac{x+y}{2+10} = \frac{x}{2}$ logo, $\frac{54}{12} = \frac{x}{2} \Longrightarrow x = 9$

$\frac{x+y}{2+10} = \frac{y}{10}$ logo, $\frac{54}{12} = \frac{y}{10} \Longrightarrow y = 45$

Resposta: O filho tem 9 anos, e o pai, 45 anos.

3) O perímetro de um quadrado está para 6, assim como o perímetro de outro quadrado está para 8. Quais são esses perímetros, sabendo que a soma deles é 84 m?

$\frac{x}{6} = \frac{y}{8}$

$x + y = 84$ $\quad \frac{x}{6} = \frac{y}{8}$ $\quad \frac{x+y}{6+8} = \frac{x}{6}$ logo, $\frac{84}{14} = \frac{x}{6} \Longrightarrow x = 36$

$\frac{x+y}{6+8} = \frac{y}{8}$ logo, $\frac{84}{14} = \frac{y}{8} \Longrightarrow y = 48$

Resposta: 36 m e 48 m.

Subtração dos antecedentes e conseqüentes das duas razões

Veja:

$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$\frac{10-5}{6-3} = \frac{10}{6}$, ou seja, $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$

$\frac{10-5}{6-3} = \frac{5}{3}$, ou seja, $\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

Obtenha, através desse método, as transformadas das seguintes proporções:

1) $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

$\frac{12-4}{15-5} = \frac{12}{15}$

$\frac{12-4}{15-5} = \frac{4}{5}$

2) $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

$\frac{20-5}{24-6} = \frac{20}{24}$

$\frac{20-5}{24-6} = \frac{5}{6}$

3) $\frac{42}{60} = \frac{7}{10}$

$\frac{42-7}{60-10} = \frac{42}{60}$

$\frac{42-7}{60-10} = \frac{7}{10}$

4) $\frac{33}{27} = \frac{11}{9}$

$\frac{33-11}{27-9} = \frac{33}{27}$

$\frac{33-11}{27-9} = \frac{11}{9}$

AGORA RESOLVA ESTES PROBLEMAS

1) Determine os números **a** e **b**, sabendo que $\frac{a}{5} = \frac{b}{3}$ e que a − b = 8.

$\frac{a}{5} = \frac{b}{3}$ → $\frac{a-b}{5-3} = \frac{a}{5}$ logo, $\frac{8}{2} = \frac{a}{5} \Rightarrow a = 20$

→ $\frac{a-b}{5-3} = \frac{b}{3}$ logo, $\frac{8}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow b = 12$

Resposta: Os números são 20 e 12.

2) Determine as idades de dois irmãos, sabendo que uma delas está para 7, assim como a outra está para 4 e que a diferença entre elas é de 9 anos.

$\frac{x}{7} = \frac{y}{4}$ $\quad x - y = 9$

$\frac{x}{7} = \frac{y}{4}$ → $\frac{x-y}{7-4} = \frac{x}{7}$ logo, $\frac{9}{3} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = 21$

→ $\frac{x-y}{7-4} = \frac{y}{4}$ logo, $\frac{9}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 12$

Resposta: 21 anos e 12 anos.

Multiplicação dos antecedentes e dos conseqüentes das duas razões

Obtenha por meio desse método as transformadas das seguintes proporções:

1) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ $\quad \frac{2 \times 6}{3 \times 9} = \frac{2^2}{3^2}$ $\quad \frac{2 \times 6}{3 \times 9} = \frac{6^2}{9^2}$

2) $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ $\quad \frac{12 \times 3}{16 \times 4} = \frac{12^2}{16^2}$ $\quad \frac{12 \times 3}{16 \times 4} = \frac{3^2}{4^2}$

3) $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$ $\quad \frac{7 \times 14}{4 \times 8} = \frac{7^2}{4^2}$ $\quad \frac{7 \times 14}{4 \times 8} = \frac{14^2}{8^2}$

4) $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ $\quad \frac{8 \times 2}{20 \times 5} = \frac{8^2}{20^2}$ $\quad \frac{8 \times 2}{20 \times 5} = \frac{2^2}{5^2}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Dê as transformadas das seguintes proporções, utilizando o método da permutação e o da inversão:

1) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ $\quad \frac{12}{4} = \frac{9}{3}$ $\quad \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ $\quad \frac{4}{3} = \frac{12}{9}$

2) $\frac{15}{5} = \frac{3}{1}$ $\quad \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$ $\quad \frac{15}{3} = \frac{5}{1}$ $\quad \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

3) $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$ $\quad \frac{40}{5} = \frac{24}{3}$ $\quad \frac{3}{24} = \frac{5}{40}$ $\quad \frac{5}{3} = \frac{40}{24}$

4) $\frac{20}{44} = \frac{5}{11}$ $\quad \frac{11}{44} = \frac{5}{20}$ $\quad \frac{20}{5} = \frac{44}{11}$ $\quad \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$

b) Dê as transformadas das seguintes proporções, utilizando o método da adição dos termos da mesma razão:

1) $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ $\quad \frac{1+2}{2} = \frac{5+10}{10}$ $\quad \frac{1+2}{1} = \frac{5+10}{5}$

2) $\frac{21}{14} = \frac{3}{2}$ $\quad \frac{21+14}{14} = \frac{3+2}{2}$ $\quad \frac{21+14}{21} = \frac{3+2}{3}$

3) $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$ $\quad \frac{5+7}{7} = \frac{20+28}{28}$ $\quad \frac{5+7}{5} = \frac{20+28}{20}$

4) $\frac{1}{5} = \frac{6}{30}$ $\quad \frac{1+5}{5} = \frac{6+30}{30}$ $\quad \frac{1+5}{1} = \frac{6+30}{6}$

c) Dê as transformadas das seguintes proporções, utilizando o método da subtração dos termos da mesma razão:

1) $\frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ $\quad \frac{15-9}{9} = \frac{5-3}{3}$ $\quad \frac{15-9}{15} = \frac{5-3}{5}$

2) $\frac{3}{2} = \frac{18}{12}$ $\quad \frac{3-2}{2} = \frac{18-12}{12}$ $\quad \frac{3-2}{3} = \frac{18-12}{18}$

3) $\frac{7}{1} = \frac{35}{5}$ $\quad \frac{7-1}{1} = \frac{35-5}{5}$ $\quad \frac{7-1}{7} = \frac{35-5}{35}$

4) $\frac{13}{8} = \frac{26}{16}$ $\quad \frac{13-8}{8} = \frac{26-16}{16}$ $\quad \frac{13-8}{13} = \frac{26-16}{26}$

d) Dê as transformadas das seguintes proporções, utilizando o método da adição dos antecedentes e conseqüentes das duas razões:

1) $\frac{2}{7} = \frac{8}{28}$ 2) $\frac{4}{9} = \frac{16}{36}$ 3) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ 4) $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$\frac{2+8}{7+28} = \frac{2}{7}$ $\frac{4+16}{9+36} = \frac{4}{9}$ $\frac{1+3}{3+9} = \frac{1}{3}$ $\frac{8+1}{32+4} = \frac{8}{32}$

$\frac{2+8}{7+28} = \frac{8}{28}$ $\frac{4+16}{9+36} = \frac{16}{36}$ $\frac{1+3}{3+9} = \frac{3}{9}$ $\frac{8+1}{32+4} = \frac{1}{4}$

e) Dê as transformadas das seguintes proporções, utilizando o método da subtração dos antecedentes e dos conseqüentes das duas razões:

1) $\frac{6}{54} = \frac{1}{9}$ 2) $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ 3) $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ 4) $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

$\frac{6-1}{54-9} = \frac{6}{54}$ $\frac{8-1}{16-2} = \frac{8}{16}$ $\frac{20-4}{15-3} = \frac{20}{15}$ $\frac{15-5}{12-4} = \frac{15}{12}$

$\frac{6-1}{54-9} = \frac{1}{9}$ $\frac{8-1}{16-2} = \frac{1}{2}$ $\frac{20-4}{15-3} = \frac{4}{3}$ $\frac{15-5}{12-4} = \frac{5}{4}$

f) Dê as transformadas das seguintes proporções, utilizando o método da multiplicação dos antecedentes e dos conseqüentes das duas razões:

1) $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ 2) $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ 3) $\frac{3}{1} = \frac{12}{4}$ 4) $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$

$\frac{4 \times 12}{5 \times 15} = \frac{4^2}{5^2}$ $\frac{4 \times 1}{20 \times 5} = \frac{4^2}{20^2}$ $\frac{3 \times 12}{1 \times 4} = \frac{3^2}{1^2}$ $\frac{4 \times 8}{6 \times 12} = \frac{4^2}{6^2}$

$\frac{4 \times 12}{5 \times 15} = \frac{12^2}{15^2}$ $\frac{4 \times 1}{20 \times 5} = \frac{1^2}{5^2}$ $\frac{3 \times 12}{1 \times 4} = \frac{12^2}{4^2}$ $\frac{4 \times 8}{6 \times 12} = \frac{8^2}{12^2}$

g) Determine os valores de **x** e **y**, usando uma transformada conveniente da proporção dada:

1) $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$ e $x + y = 20$ (6 e 14) 2) $\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$ e $x + y = 36$ (6 e 30)

3) $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$ e $x - y = 12$ (20 e 8) 4) $\frac{x}{y} = \frac{10}{7}$ e $x - y = 15$ (50 e 35)

h) Resolva os seguintes problemas:

1) A soma de dois números é 45, e a razão entre eles é de $\frac{2}{7}$. Determine esses números. (10 e 35)

2) Decomponha o número 32 em duas parcelas, **x** e **y**, de tal forma que $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$. (12 e 20)

3) Duas pessoas compraram o mesmo objeto em lojas diferentes, e uma delas pagou Cr$ 20,00 a mais do que a outra. Descubra quanto cada pessoa pagou por esse objeto, sabendo que seus preços estão na razão $\frac{4}{9}$. (Cr$ 16,00 e Cr$ 36,00)

4) A quantia de Cr$ 55 000,00 foi repartida entre duas pessoas. Sabendo que as partes que couberam a cada uma dessas pessoas estão na razão $\frac{4}{7}$, descubra quanto recebeu cada uma. (Cr$ 20 000,00 e Cr$ 35 000,00)

5) Descubra uma fração equivalente a $\frac{11}{4}$, cuja diferença entre seus termos é 28. $\left(\frac{44}{16}\right)$

6) Uma peça de tecido medindo 98 m será dividida em duas partes, **x** e **y**. Quanto medirá cada uma dessas partes, sabendo que $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$? (42 m e 56 m)

7) Decompor o número 60 em duas parcelas, **a** e **b**, de tal forma que $\frac{a}{4} = \frac{b}{11}$. (16 e 44)

8) A soma de dois números é 84, e a razão entre eles é $\frac{3}{4}$. Quais são esses números? (36 e 48)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Estabeleça a razão entre os números abaixo, de modo que os termos sejam números naturais e os menores possíveis:

1) 8 e 17: $\frac{8}{17}$ ou $8:17$

2) $3\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{10}$: $\frac{35}{1}$ ou $35:1$

3) 1,5 e 0,4: $\frac{15}{4}$ ou $15:4$

4) 1,6 e 0,8: $\frac{2}{1}$ ou $2:1$

5) 1,8 e $1\frac{3}{5}$: $\frac{9}{8}$ ou $9:8$

6) 0,12 e 0,15: $\frac{4}{5}$ ou $4:5$

7) 2,4 m e 0,036 hm: $\frac{2}{3}$ ou $2:3$

8) 0,018 dam² e 2,1 m²: $\frac{6}{7}$ ou $6:7$

b) Resolva os problemas:

1) Os lados desiguais de um retângulo medem 25 m e 1,5 dam. Qual é a razão entre essas medidas? $\left(\frac{5}{3}\right)$

2) Uma mistura apresenta 0,5 dal de água e 100 dl de álcool. Determine a razão entre:

- água e álcool; $\left(\frac{1}{2}\right)$
- água e mistura; $\left(\frac{1}{3}\right)$
- álcool e água; $\left(\frac{2}{1}\right)$
- álcool e mistura. $\left(\frac{2}{3}\right)$

3) Determine a razão entre:

- 1 mês e 1 ano; $\left(\frac{1}{12}\right)$
- 1 hora e 20 minutos; $\left(\frac{3}{1}\right)$
- 15 dias e 1 semana; $\left(\frac{15}{7}\right)$
- 1 bimestre e 6 meses; $\left(\frac{1}{3}\right)$
- 1 dia e 20 horas; $\left(\frac{6}{5}\right)$
- 1 minuto e 45 segundos. $\left(\frac{4}{3}\right)$

4) A população de uma cidade é de 72 000 habitantes, dos quais 48 000 são mulheres. Ache a razão entre:

- mulheres e homens; $\left(\frac{2}{1}\right)$
- população e mulheres; $\left(\frac{3}{2}\right)$
- homens e mulheres; $\left(\frac{1}{2}\right)$
- população e homens. $\left(\frac{3}{1}\right)$

5) Suponha que numa sala de aula existem 50 carteiras e 45 alunos. Qual é a razão entre o número de alunos e o de carteiras? $\left(\frac{9}{10}\right)$

c) Dê a leitura das seguintes proporções e indique a propriedade fundamental:

1) $\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$ dois está para seis, assim como seis está para dezoito

$2 \times 18 = 6 \times 6$

2) $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ nove está para quinze, assim como três está para cinco

$9 \times 5 = 15 \times 3$

3) $\frac{4}{10} = \frac{16}{40}$ quatro está para dez, assim como dezesseis está para quarenta

$4 \times 40 = 10 \times 16$

d) Determine o termo desconhecido nas seguintes proporções:

1) $\frac{6}{13} = \frac{x}{52}$ (24)

2) $7 : 15 = 21 : x$ (45)

3) $\frac{3}{5} : \frac{3}{2} = x : \frac{5}{4}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

4) $\frac{x}{15} = \frac{4}{5}$ (12)

5) $\frac{1}{2} : \frac{5}{4} = \frac{1}{3} : x$ $\left(\frac{5}{6}\right)$

6) $\frac{1,4}{x} = \frac{2,1}{\frac{3}{10}}$ (0,2)

7) $0,1 : 0,4 = x : 1,2$ (0,3)

8) $x : 2 = 2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$ (4)

e) Resolva os problemas:

1) A capacidade de uma garrafa está para a capacidade de um copo, assim como quatro está para um. Determine a capacidade do copo, sabendo que a da garrafa é de 900 ml. (225 ml)

2) O antecedente de uma razão é 12. Determine o conseqüente dessa razão, sabendo que ela forma uma proporção com a razão $\frac{3}{14}$. (56)

3) O antecedente de uma razão é 28. Qual é o seu conseqüente, sabendo que ela forma uma proporção com a razão $\frac{70}{5}$? (2)

4) Num terreno retangular, medindo 8 m por 25 m, foi construída uma casa. Sabendo que a área do terreno está para a área construída, assim como 10 está para 9, determine a área correspondente à construção. ($180\ m^2$)

f) Determine a quarta proporcional correspondente aos números:

1) 5, 12 e 20 (48)
2) 17, 2 e 51 (6)
3) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$ $\left(\frac{2}{15}\right)$
4) 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{8}\right)$
5) 8, 5 e 2 $\left(\frac{5}{4}\right)$
6) 9, 8 e 4,5 (4)
7) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$ e $3\frac{1}{8}$ $\left(\frac{75}{16}\right)$
8) 13, 12 e 3,25 (3)
9) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ (1)

g) Ache a terceira proporcional correspondente aos números:

1) 50 e 5 $\left(\frac{1}{2}\right)$
2) 24,5 e 7 (2)
3) $\frac{9}{2}$ e $\frac{3}{4}$ $\left(\frac{1}{8}\right)$
4) 2,25 e 3 (4)

h) Aplicando as transformadas envolvendo operações, resolva os problemas:

1) Um terreno, cuja área é de 110 m^2, foi repartido em duas partes, na razão de $\frac{7}{15}$. Qual é a área de cada parte?
($35\ m^2$ e $75\ m^2$)

2) A idade de um pai está para a idade de seu filho assim como três está para um. Determine essas idades, sabendo que a diferença entre elas é de 28 anos. (42 anos e 14 anos)

3) Um pai repartiu Cr$ 500,00 entre seus dois filhos. Quanto recebeu cada filho, sabendo que as partes recebidas estão entre si assim como 10 : 15? (Cr$ 200,00 e Cr$ 300,00)

4) Achar a fração equivalente a $\frac{5}{14}$ cuja soma de seus termos é 152. $\left(\frac{40}{112}\right)$

5) Decompor o número 80 em duas partes, **a** e **b**, de tal forma que $\frac{a}{7} = \frac{b}{13}$. (28 e 52)

6) Numa partida de basquete entre as equipes A e B, o número de pontos feitos pela equipe A está para o número de pontos feitos pela equipe B assim como quatro está para três. Descubra qual foi o resultado dessa partida, sabendo que o total de pontos é 210. (120 a 90)

7) Decompor o número 60 em duas partes, **x** e **y**, de tal forma que x : 9 = y : 11. (27 e 33)

8) Descubra qual é a fração equivalente a $\frac{3}{7}$, cuja diferença entre seus termos é 48. $\left(\frac{36}{84}\right)$

Unidade 14 GRANDEZAS PROPORCIONAIS

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Considere o seguinte problema:

Rogério foi ao armazém, comprou 1 litro de uma certa bebida e pagou Cr$ 50,00. Quanto pagaria se comprasse 2 litros?
Pagaria: 2 × Cr$ 50,00 = Cr$ 100,00

E se Rogério comprasse 3 litros? Pagaria: 3 × Cr$ 50,00 = Cr$ 150,00
Observe, então:

Capacidade	Preço
1 litro	Cr$ 50,00
2 litros	Cr$ 100,00
3 litros	Cr$ 150,00

Perceba que o que ocorre com o valor da capacidade ocorre também com o preço. Assim, podemos estabelecer as seguintes igualdades:

$$\frac{1\,\ell}{2\,\ell} = \frac{\text{Cr\$ } 50{,}00}{\text{Cr\$ } 100{,}00} \quad \frac{1\,\ell}{3\,\ell} = \frac{\text{Cr\$ } 50{,}00}{\text{Cr\$ } 150{,}00} \quad \frac{2\,\ell}{3\,\ell} = \frac{\text{Cr\$ } 100{,}00}{\text{Cr\$ } 150{,}00}$$

Como você pode notar, capacidade e preço são grandezas diretamente proporcionais.

A partir desse exemplo, podemos dizer que duas grandezas heterogêneas, variáveis e que dependem uma da outra são diretamente proporcionais quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual à razão entre os dois valores correspondentes da segunda.

REGRA DE TRÊS SIMPLES DIRETA

A resolução de problemas que envolvem duas grandezas diretamente proporcionais é feita com auxílio de uma regra chamada **regra de três simples direta** (R3SD).

Vamos ver alguns casos.

1) Se 5 m de um determinado tecido custam Cr$ 60,00, quanto custam 8 m desse tecido?

Comprimento	Preço
5 m	Cr$ 60,00
8 m	x

Comprimento e preço são grandezas diretamente proporcionais.

Então: $\frac{5\text{ m}}{8\text{ m}} = \frac{\text{Cr\$ } 60{,}00}{x} \Rightarrow 5x = 8 \cdot 60$

$5x = 480 \Longleftrightarrow x = 480 : 5$

$x = 96$

Resposta: Cr$ 96,00.

2) Um carro percorreu 240 km em 3h 20 min. Nas mesmas condições, em quanto tempo esse carro percorrerá 3 000 hm?

Comprimento	Tempo
240 km	3h 20min = 200 min
3 000 hm ⟺ 300 km	x

Comprimento e tempo são grandezas diretamente proporcionais.

Então: $\frac{240\text{ km}}{300\text{ km}} = \frac{200\text{ min}}{x} \Rightarrow 240 \cdot x = 300 \cdot 200$

$240 \cdot x = 60\,000$

$x = 60\,000 : 240$

$x = 250$

Resposta: 250 minutos ou 4h 10 min.

Atenção: ao estabelecer uma proporção, os dois termos da mesma razão devem estar na mesma unidade de medida.

EXERCÍCIOS

1) 15 m de um determinado tecido custam Cr$ 450,00. Qual é o preço de 75 m desse mesmo tecido?

$\frac{15 m}{75 m} = \frac{Cr\$ 450,00}{x} \Rightarrow 15 \cdot x = 75 \cdot 450$

$15 \cdot x = 33\,750 \Rightarrow x = 2\,250$ Logo, Cr$ 2 250,00.

Resposta: Cr$ 2 250,00.

2) Uma torneira despeja, numa caixa, 250 ℓ em 1 h 15 min. Sabendo que a capacidade da caixa é de 10 hl, em quanto tempo a caixa estará cheia?

1 h 15 min ⟺ 75 min
10 hl ⟺ 1000 ℓ

$\frac{250 ℓ}{1000 ℓ} = \frac{75 min}{x} \Rightarrow 250 \cdot x = 75 \cdot 1000$; $x = 300$ min } 300 min ⟺ 5 h

Resposta: 5 h.

3) Adquiri sete calças por Cr$ 1 750,00. Quantas calças idênticas o meu amigo poderá comprar com Cr$ 7 000,00?

$\frac{7}{x} = \frac{1\,750}{7\,000} \Rightarrow 1\,750 \cdot x = 49\,000$; $x = 28$ } 28 calças

Resposta: 28.

4) No mesmo instante em que uma pessoa com 160 cm de altura projeta uma sombra de 1 m, um poste projeta uma sombra de 8 m. Qual é a altura do poste?

160 cm ⟺ 1,6 m $\quad \frac{1,6}{x} = \frac{1 m}{8 m} \Rightarrow x = 12,8$ m

Resposta: 12,8 m.

5) Uma indústria gastou 600 m de um determinado tecido para fazer 200 uniformes. Quantos decâmetros desse tecido serão gastos para fazer 700 uniformes?

$\frac{600 m}{x} = \frac{200}{700} \Rightarrow 200 \cdot x = 420\,000$; $x = 2100$ } 2 100 m ⟺ 210 dam

Resposta: 210 dam.

6) Uma indústria empregou 38 kg de plástico para fabricar 300 carrinhos de brinquedo. Quantos carrinhos idênticos serão fabricados com 57 kg de plástico?

$\frac{38 kg}{57 kg} = \frac{300}{x} \Rightarrow 38 \cdot x = 57 \cdot 300$; $x = 450$ } 450 carrinhos

Resposta: 450.

GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Vamos considerar o seguinte problema:

Um operário faz um serviço em 6 horas. Em quanto tempo o mesmo serviço seria feito por dois operários?

Seria feito em 3 horas, ou seja, na metade do tempo gasto por um operário.

E por três operários?

Seria feito em 2 horas, ou seja, na terça parte do tempo gasto por um operário.

Pois bem, observe:

Operário	Tempo
1	6 h
2	3 h
3	2 h

Perceba que o que ocorre com o número de operários ocorre de maneira inversa com o tempo. Portanto, operário e tempo são grandezas inversamente proporcionais.

Neste caso, podem-se estabelecer as seguintes igualdades:

$\frac{1 \text{ operário}}{2 \text{ operários}} = \frac{3 \text{ h}}{6 \text{ h}}$ $\frac{1 \text{ operário}}{3 \text{ operários}} = \frac{2 \text{ h}}{6 \text{ h}}$ $\frac{2 \text{ operários}}{3 \text{ operários}} = \frac{2 \text{ h}}{3 \text{ h}}$

Então, como podemos observar, duas grandezas heterogêneas, variáveis e que dependem uma da outra, são inversamente proporcionais quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual à razão inversa dos dois valores correspondentes da segunda.

REGRA DE TRÊS SIMPLES INVERSA

Os problemas que envolvem duas grandezas inversamente proporcionais são resolvidos com auxílio de uma regra chamada **regra de três simples inversa** (R3SI).

Acompanhe a resolução de alguns problemas.

1) Um automóvel, com a velocidade de 80 km/h, percorre um trajeto em 4 h. Em quanto tempo esse mesmo trajeto seria percorrido, se o carro estivesse com a velocidade de 64 km/h?

Velocidade	Tempo
80 km/h	4 h
64 km/h	x

Velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais. Então:

$\frac{80 \text{ km/h}}{64 \text{ km/h}} = \frac{x}{4 \text{ h}} \Rightarrow 64 \cdot x = 80 \cdot 4$

$64 \cdot x = 320 \Rightarrow x = 5$

Resposta: 5 horas.

2) Uma turma de 40 alunos foi acampar e levou alimentos para 10 dias. Chegando ao local do acampamento, encontraram mais 10 alunos. Quantos dias durarão os alimentos, com a nova turma?

Alunos	Tempo
40	10 dias
40 + 10 = 50	x

Aluno e tempo são grandezas inversamente proporcionais. Então:

$\frac{40 \text{ alunos}}{50 \text{ alunos}} = \frac{x}{10 \text{ dias}} \Rightarrow 50 \cdot x = 40 \cdot 10$

$50 \cdot x = 400 \Rightarrow x = 8$

Resposta: 8 dias.

AGORA RESOLVA ESTES PROBLEMAS

1) Um automóvel, com a velocidade de 50 km/h, demora 6 h para ir de uma cidade a outra. Com que velocidade deverá retornar para percorrer o mesmo trajeto num prazo de 4 h?

Velocidade	Tempo
50 km/h	6 h
x	4 h

Velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais. Então: $\frac{50}{x} = \frac{4}{6} \Rightarrow 4x = 300$ $\therefore x = 75$

Resposta: 75 km/h.

2) 10 pedreiros constroem uma casa em 2 meses. Em quantos dias a mesma casa seria construída por 15 pedreiros?

Pedreiros	Tempo
10	60 dias
15	x

$\frac{10}{15} = \frac{x}{60} \Rightarrow 15x = 600$

$x = 40$

Resposta: 40 dias

3) Um carro com a velocidade de 45 km/h leva 3 h 20 min para percorrer uma certa distância. Em quanto tempo fará esse mesmo percurso com a velocidade de 72 km/h?

Velocidade	Tempo
45 km/h	3 h 20 min ⟺ 200 min
72 km/h	x

$\frac{45}{72} = \frac{x}{200} \Rightarrow 72x = 9\,000$

$x = 125 \text{ min}$

125 min ⟺ 2 h 5 min

Resposta: 2 h 05 min.

a) Observe as tabelas e conclua se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais. A seguir, complete as frases e escreva as respectivas proporções com os valores indicados nas tabelas:

1)

Grandeza X	Grandeza Y
12	4
15	5
18	6

As grandezas X e Y são *diretamente* proporcionais, pois:

$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, $\frac{12}{18} = \frac{4}{6}$ e $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

2)

Grandeza A	Grandeza B
2	30
5	12
6	10

As grandezas A e B são *inversamente* proporcionais, pois:

$\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$, $\frac{2}{6} = \frac{10}{30}$ e $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$

b) Sabendo que as grandezas A e B são diretamente proporcionais, complete as tabelas:

1)

Grandeza A	Grandeza B
7	*35*
11	55
12	60

2)

Grandeza A	Grandeza B
52	13
60	*15*
68	17

c) Sabendo que as grandezas X e Y são inversamente proporcionais, complete as tabelas:

1)

Grandeza X	Grandeza Y
2	*18*
4	9
6	6

2)

Grandeza X	Grandeza Y
50	2
25	4
10	*10*

d) Resolva os problemas:

1) 20 operários fazem um determinado trabalho em 15 dias. Em quantos dias esse mesmo trabalho, nas mesmas condições, será feito por 30 operários? *(10 dias)*

2) Uma indústria produz 15 000 peças em 5 dias. Quantos dias essa indústria deverá trabalhar para produzir 87 000 peças? *(29 dias)*

3) Com a velocidade de 70 quilômetros horários, um automóvel percorreu um trajeto em 18 horas. Quantas horas gastaria para percorrer o mesmo trajeto, se a sua velocidade fosse de 10 quilômetros horários a menos? *(21 horas)*

PROPORCIONALIDADE COMPOSTA

Observe:

Se uma grandeza é proporcional a outras, então os valores de suas medidas são proporcionais ao produto dos valores das medidas das outras.

Triângulo		
Base	**Altura**	**Área**
5 (× 2)	4 (× 2)	$A = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ (× 2 × 2)
10	8	$A = \frac{10 \times 8}{2} = 40$

Triângulo		
Base	**Altura**	**Área**
4 (× 3)	2 (× 3)	$A = \frac{4 \times 2}{2} = 4$ (× 3 × 3)
12	6	$A = \frac{12 \times 6}{2} = 36$

Com base neste fato, complete as tabelas sem o auxílio de fórmulas:

1)

Triângulo		
Base	**Altura**	**Área**
10 ×2	5 ×2	25 ×2×2=4
20	10	100

2)

Triângulo		
Base	**Altura**	**Área**
7 ×2	6 × $\frac{1}{2}$	21 × 2×$\frac{1}{2}$=1
14	3	21

3)

Retângulo		
Base	**Altura**	**Área**
4 ×6	3 × $\frac{1}{2}$	12 ×6×$\frac{1}{2}$=3
24	1,5	36

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Problemas que envolvem várias grandezas, direta ou inversamente proporcionais, são resolvidos com auxílio de uma regra chamada **regra de três composta** (R3C).

Veja alguns exemplos:

1) Dois operários, depois de 8 dias de serviço, receberam Cr$ 400,00. Quanto receberão cinco operários por 12 dias de trabalho?

Operários	Tempo	Valor
2	8 dias	Cr$ 400,00
5	12 dias	x

Analise, isoladamente e com cada uma das outras, a grandeza que contém o valor desconhecido. Assim:

Operários	Valor
2	Cr$ 400,00
5	x

aumenta — também aumenta

Se dois operários recebem Cr$ 400,00, cinco operários deverão receber mais. Então, as grandezas, operário e valor, são diretamente proporcionais. Portanto, a ordem das razões é:

$\frac{2}{5}$ e $\frac{400}{x}$

Tempo	Valor
8 dias	Cr$ 400,00
12 dias	x

aumenta — também aumenta

Se em 8 dias os operários recebem Cr$ 400,00, em 12 dias deverão receber mais. Então, as grandezas, tempo e valor, são diretamente proporcionais. Portanto, a ordem das razões é:

$\frac{8}{12}$ e $\frac{400}{x}$

Para as três grandezas, a ordem das razões é: $\frac{2}{5}$, $\frac{400}{x}$ e $\frac{8}{12}$.

Podemos concluir então que: $\frac{400}{x} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{400}{x} = \frac{4}{15} \Rightarrow x = \frac{400 \cdot 15}{4} = 1\,500$

Resposta: Cr$ 1 500,00.

2) Numa indústria, quatro máquinas trabalhando 8 dias produzem 600 peças. Quantos dias serão necessários para que apenas duas máquinas produzam 900 peças?

Máquinas	Tempo	Peças
4	8 dias	600
2	x	900

Máquinas	Tempo
4	8 dias
2	x

diminui — aumenta

Se quatro máquinas produzem um certo número de peças em 8 dias, duas máquinas necessitam de mais dias para produzir o mesmo número de peças. Então, máquina e tempo são grandezas inversamente proporcionais. Logo, a ordem das razões é:

$\frac{2}{4}$ e $\frac{8}{x}$

Tempo	Peças
8 dias	600
x	900

aumenta — aumenta

Se em 8 dias um certo número de máquinas produz 600 peças, para produzir 900 peças com o mesmo número de máquinas serão necessários mais dias. Então, tempo e peça são grandezas diretamente proporcionais. Logo, a ordem das razões é:

$\frac{8}{x}$ e $\frac{600}{900}$

Para as três grandezas, a ordem das razões é: $\frac{2}{4}$, $\frac{8}{x}$ e $\frac{600}{900}$

Podemos concluir então que: $\frac{8}{x} = \frac{2}{4} \cdot \frac{600}{900} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 24$

Resposta: 24 dias.

RESOLVA VOCÊ MESMO

1) Cinco máquinas trabalhando 4 horas produzem 200 m de um tecido. Quantas máquinas são necessárias para em 3 horas produzir 800 m desse tecido?

Resposta: 15.

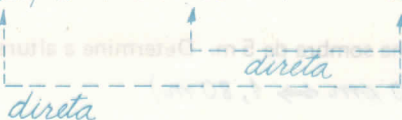
2) Uma turma de 20 pessoas foi acampar, levando alimentos suficientes para 21 dias, com 3 refeições diárias. Chegando ao local, encontraram mais 15 pessoas. Por quantos dias terão alimento, se fizerem apenas duas refeições diárias?

Turma	Tempo	Refeições
20	21 dias	3
35	x	2

inversa — inversa

$\frac{21}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{35}{20}$ $\frac{21}{x} = \frac{14}{12} \Rightarrow x = 18$ dias

Resposta: 18 dias.

3) Um carro com a velocidade média de 80 km/h percorre, em 2 dias de viagem, 1 800 km. Quantos quilômetros percorrerá, nas mesmas condições, em 5 dias, com velocidade média de 60 km/h?

Resposta: 3 375 km.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva os problemas:

1) Um carro percorre 240 km em 3 horas. Quanto tempo gastará para percorrer 200 km com a mesma velocidade? (2 h 30 min)

2) Gastei 5 horas para ir de uma cidade a outra, com a velocidade de 60 km/h. Desejando gastar uma hora a menos para retornar, que velocidade devo imprimir ao meu carro? (75 km/h)

3) Numa indústria, uma máquina produz, em 6 dias, 400 fardas. Qual o tempo necessário para esta máquina, em idênticas condições, produzir 750 fardas? (11 dias e 6 horas)

4) $\frac{2}{5}$ kg de um produto custam Cr$ 20,00. Qual o preço de $\frac{5}{8}$ kg desse mesmo produto? (Cr$ 31,25)

5) Consumi $\frac{3}{5}$ ℓ de leite em 2 minutos. Quanto tempo levarei para consumir $\frac{3}{4}$ ℓ de leite? (2 min 30 s)

6) Na confecção de 40 uniformes para os alunos de um colégio foram gastos 100 m de tecido. Quantos hectômetros desse tecido serão necessários para fazer 140 uniformes idênticos? (3,5 hm)

7) 20 pedreiros fazem um muro em 25 dias. Em quantos dias um muro idêntico seria feito por 40 pedreiros? (12,5 dias)

8) Um terreno com as dimensões de 12 m por 20 m custou Cr$ 300 000,00. Em idênticas condições, qual será o preço de um terreno com as dimensões de 6 m por 30 m? (Cr$ 225 000,00)

9) 3,5 kg de um produto custam Cr$ 210,00. Dispondo de Cr$ 450,00, quantos quilogramas desse produto poderei comprar? (7,5 kg)

10) Um operário, trabalhando 10 horas por dia, recebeu Cr$ 2 400,00 em 12 dias. Quantos dias esse operário deveria trabalhar para receber Cr$ 3 200,00, com uma jornada de 8 horas? (20 dias)

11) Um edifício é construído em 12 meses por 20 operários, trabalhando 10 horas por dia. Em quanto tempo esse edifício seria construído, se fossem empregados 15 operários com uma jornada de 12 horas por dia? (10 meses e 20 dias)

12) 20 máquinas produzem, em 15 dias, 400 m de um tecido. Quantos metros desse tecido serão produzidos, em 1 mês, por 12 máquinas idênticas? (480 m)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

Resolva estes problemas:

1) Um automóvel percorre 240 km em 3 horas. Em quantas horas percorrerá 400 km? (5 h)

2) Uma roda dá 2 376 voltas em 9 minutos. Quantas voltas dará em 1 h 27 min? (22 968)

3) Um poste de 12 m de altura projeta, em determinada hora, uma sombra de 5 m. Determine a altura de uma pessoa que, nessa mesma hora, projeta uma sombra de 75 cm. (180 cm ⟺ 1,80 m)

4) Dispondo de Cr$ 300,00 posso comprar 2,5 kg de um determinado produto. De quanto precisaria dispor para comprar 450 dag? (Cr$ 540,00)

5) Na confecção de 5 blusas foram gastos 900 g de lã. Quantos hectogramas da mesma lã serão necessários para confeccionar 14 blusas idênticas? (25,2 hg)

6) 12 funcionários de uma pavimentadora conseguem pavimentar 100 m de uma rua em 2 dias. Quantas semanas estes funcionários levarão para pavimentar 1,4 km da mesma rua? (4)

7) 6 ℓ de um determinado líquido "pesam" 7,5 kg. Quantos decilitros serão necessários para termos 30 000 g desse líquido? (240)

8) Cinco operários demoram 9 horas para transportar 2 100 tijolos por uma distância de 500 m. Quantos tijolos, nas mesmas condições, seis operários transportarão por uma distância de 800 m, em 5 horas? (875)

9) Cinco grupos de estudo com 4 alunos em cada grupo resolvem, em 2 horas, 36 problemas. Em quanto tempo 10 grupos de 8 alunos resolverão 72 problemas? (1 h)

10) Uma perfuradora de cartões, trabalhando 12 horas por dia, perfura 3 200 cartões em 8 dias. Quantas horas por dia deverá trabalhar para perfurar 5 000 cartões em 15 dias? (10 h/dia)

11) Uma pessoa datilografa 3 folhas de 30 linhas cada uma em 1 h 30 min. Qual o tempo necessário para essa pessoa datilografar cinco folhas de 40 linhas cada uma? (3 h 20 min)

12) 16 operários fazem 720 peças em 6 dias. Quantos operários são necessários para fazer 2 160 peças em 24 dias? (12 operários)

13) Um aluno efetua 400 operações, em 2 dias, estudando 8 horas por dia. Em quantos dias esse aluno, estudando duas horas por dia, efetuará 200 operações? (4 dias)

14) Quantos homens são necessários para construir um muro de 150 m de comprimento por 10 m de altura em 30 dias, sabendo que, nas mesmas condições, 25 homens constroem um muro de 50 m de comprimento por 8 m de altura, em 8 dias? (25)

15) Andando 14 horas por dia, com uma velocidade média de 30 km/h, um carro leva 6 dias para percorrer 2 520 km. Qual deve ser a velocidade média desse carro para ele percorrer essa mesma distância em 7 dias, andando 10 horas por dia? (36 km/h)

PORCENTAGEM

NOÇÃO DE RAZÕES CENTESIMAIS

Observe as razões:

$\frac{2}{100}$, $\frac{52}{100}$ e $\frac{84}{100}$

O que essas razões apresentam de especial? Todas possuem conseqüente 100.

Essas razões são denominadas porcentuais, centesimais ou, ainda, por cento e costumam ser representadas de uma outra forma, como veremos a seguir.

UMA NOVA SIMBOLOGIA DAS RAZÕES CENTESIMAIS

Veja:

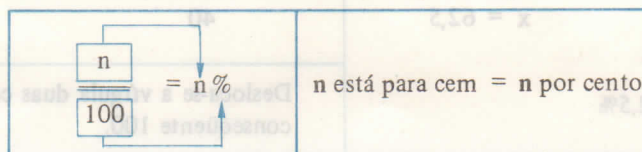
$\frac{2}{100}$ é representada também por ⟶ 2% (Lê-se: dois por cento.)

$\frac{52}{100}$ ⟶ 52% (Lê-se: cinqüenta e dois por cento.)

$\frac{84}{100}$ ⟶ 84% (Lê-se: oitenta e quatro por cento.)

Perceba que o conseqüente 100 é substituído pelo símbolo %, que significa "por cento".

Veja:

$\frac{n}{100}$ = n %	n está para cem = n por cento

Represente, usando o símbolo por cento, as razões centesimais:

1) $\frac{5}{100}$ ⟺ 5 % 2) $\frac{11}{100}$ ⟺ 11 % 3) $\frac{25}{100}$ ⟺ 25 % 4) $\frac{32}{100}$ ⟺ 32 %

5) $\frac{41}{100}$ ⟺ 41 % 6) $\frac{1}{100}$ ⟺ 1 % 7) $\frac{54}{100}$ ⟺ 54 % 8) $\frac{62}{100}$ ⟺ 62 %

Represente na forma de razões centesimais:

1) 3% ⟺ $\frac{3}{100}$ 2) 8% ⟺ $\frac{8}{100}$ 3) 15% ⟺ $\frac{15}{100}$ 4) 20% ⟺ $\frac{20}{100}$

5) 37% ⟺ $\frac{37}{100}$ 6) 4% ⟺ $\frac{4}{100}$ 7) 18% ⟺ $\frac{18}{100}$ 8) 69% ⟺ $\frac{69}{100}$

9) 80% ⟺ $\frac{80}{100}$ 10) 90% ⟺ $\frac{90}{100}$ 11) 92% ⟺ $\frac{92}{100}$ 12) 99% ⟺ $\frac{99}{100}$

Como podemos representar nessa nova simbologia as razões não-centesimais, isto é, as razões cujos conseqüentes são diferentes de 100?

Como vamos ver a seguir, isso pode ser feito de duas maneiras. Consideremos, como exemplo, a razão $\frac{2}{5}$ e vamos expressá-la através da nova simbologia.

Primeiro processo: Obter uma razão equivalente a $\frac{2}{5}$ cujo conseqüente seja 100.

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{100} \quad (5 \cdot x;\ 2 \cdot 100) \Rightarrow 5x = 200$$

$$x = 200 : 5$$

$$x = 40$$

Então: $\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%$

Segundo processo: Efetuar a divisão do antecedente pelo conseqüente, dando o quociente com duas casas decimais. Assim:

$$\frac{2}{5} \longrightarrow 0{,}40 = \frac{40}{100} = 40\%$$

$$20 \div 5 = 0{,}40 \quad (\text{resto } 0)$$

Desloca-se a vírgula duas casas para a direita e coloca-se o conseqüente 100.

Represente, usando o símbolo por cento, as razões:

1) $\frac{3}{4}$ = 75 %
2) $\frac{4}{5}$ = 80 %
3) $\frac{1}{2}$ = 50 %
4) $\frac{7}{10}$ = 70 %

5) $\frac{13}{20}$ = 65 %
6) $\frac{43}{50}$ = 86 %
7) $\frac{24}{120}$ = 20 %
8) $\frac{46}{200}$ = 23 %

Muitas vezes, o quociente exato apresenta mais de duas casas decimais, ou seja, o antecedente da razão centesimal é um numeral decimal.

Observe a razão $\frac{5}{8}$ e vamos escrevê-la usando o símbolo por cento:

Primeiro processo:

$$\frac{5}{8} = \frac{x}{100} \quad (8 \cdot x;\ 5 \cdot 100) \Rightarrow 8x = 500$$

$$x = 500 : 8$$

$$x = 62{,}5$$

Então: $\frac{5}{8} = \frac{62{,}5}{100} = 62{,}5\%$

Segundo processo:

$$\frac{5}{8} \longrightarrow 0{,}625 = \frac{62{,}5}{100} = 62{,}5\%$$

$$50 \div 8 = 0{,}625 \quad (20,\ 40)$$

Desloca-se a vírgula duas casas para a direita e coloca-se o conseqüente 100.

Escreva, usando o símbolo por cento, os seguintes numerais decimais:

1) 0,148 = 14,8 %
2) 0,235 = 23,5 %
3) 0,81 = 81 %
4) 0,578 = 57,8 %

5) 0,2546 = 25,46 %
6) 0,15 = 15 %
7) 0,2 = 20 %
8) 0,07 = 7 %

Escreva, usando o símbolo "por cento", as razões:

1) $\frac{31}{250}$ = 12,4 %
2) $\frac{39}{500}$ = 7,8 %
3) $\frac{1}{50}$ = 2 %
4) $\frac{7}{125}$ = 5,6 %

5) $\frac{41}{125}$ = 32,8 %
6) $\frac{11}{20}$ = 55 %
7) $\frac{14}{40}$ = 35 %
8) $\frac{55}{44}$ = 125 %

Escreva na forma de numerais decimais:

1) 27% = 0,27
2) 22% = 0,22
3) 34% = 0,34
4) 15,8% = 0,158

5) 28,5% = 0,285
6) 1,8% = 0,018
7) 0,1% = 0,001
8) 54,6% = 0,546

9) 98,1% = 0,981
10) 3,4% = 0,034
11) 120% = 1,2
12) 78,3% = 0,783

COMO INTERPRETAR ESSA NOVA SIMBOLOGIA?

Suponha que você tem uma barra de chocolate e a divide em quatro partes iguais, das quais come uma. Que porção da barra de chocolate você comeu?

Agora veja:

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{100} \Rightarrow 4x = 100$$
$$x = 100 : 4$$
$$x = 25$$

Então:

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$

Você comeu 25% da barra de chocolate, ou seja, se a barra fosse dividida em 100 partes iguais, o pedaço que você comeu corresponderia a 25 dessas partes.

Como você pode perceber, a expressão:

"Comi 25% do meu chocolate" significa:
"Das 100 partes iguais em que foi dividida minha barra de chocolate, comi 25".

Analisemos outras expressões:

1) "Gastei 30% do que possuía" significa:
"De cada Cr$ 100,00 que possuía, gastei Cr$ 30,00".

2) "Recebi 80% da minha mesada" significa:
"De cada Cr$ 100,00 da minha mesada, recebi Cr$ 80,00".

3) "40% dos alunos do meu colégio possuem menos de 15 anos" significa:
"De cada 100 alunos do meu colégio, 40 possuem menos de 15 anos".

Analise as expressões e dê o significado de cada uma:

1) "30% dos alunos do meu colégio cursam a 6.ª série" significa:
de cada 100 alunos do meu colégio, 30 cursam a 6ª série.

2) "Uma mistura de água e sal contém 18% em 'peso' de sal" significa:
cada 100 g da mistura contém 18 g de sal.

3) "25% dos alunos de um colégio são internos" significa:
de cada 100 alunos desse colégio, 25 são internos.

NOÇÃO DE PORCENTAGEM

Suponha que um de seus colegas diz: "45% dos alunos da nossa classe são meninas".
Como você interpreta tal sentença?
Deve interpretar assim: "Em cada 100 alunos da nossa classe, 45 são meninas".
Perceba que, somente com isso, você ainda não sabe qual é a quantidade de meninas.
Vamos determinar, então, a quantidade de meninas dessa classe. Para isso, é necessário, porém, conhecer o total de alunos da classe.
Vamos admitir, pois, que na classe existam 40 alunos, e resolver o seguinte problema:
Na minha classe existem 40 alunos, dos quais 45% são meninas. Quantas meninas existem na minha classe?
Este problema pode ser resolvido por regra de três.

Veja: Em cada 100 alunos, 45 são meninas.
Logo, em 40 alunos, x são meninas.

Alunos e meninas são grandezas diretamente proporcionais.

$$\frac{100}{40} = \frac{45}{x} \Rightarrow 100x = 40 \cdot 45$$
$$100x = 1\,800$$
$$x = 1\,800 : 100$$
$$x = 18$$

Resposta: Na minha classe existem 18 meninas.

A quantidade de meninas da minha classe, que é 18 e que corresponde a 45% do total de alunos, recebe o nome de porcentagem. Então, você poderá dizer: A porcentagem de meninas da minha classe é igual a 18.

Concluindo, podemos dizer que:

> Porcentagem é o resultado que se obtém ao calcular tantos por cento ou tantos centésimos de uma quantidade qualquer.

Calcule as seguintes porcentagens:

1) No meu jardim existem 15 roseiras, das quais 40% são de rosas brancas. Quantos pés de rosas brancas há no meu jardim?

100 pés — 40 são brancas; 15 pés — x são brancas $\Big\}$ $\frac{100}{15} = \frac{40}{x} \Rightarrow 100x = 600$; $x = 6$ $\Big\}$ Logo, no meu jardim, há seis pés de rosas brancas.

Resposta: 6.

2) 60% dos alunos do meu colégio ainda não têm 15 anos. Sabendo que no meu colégio existem 800 alunos, quantos ainda não têm 15 anos?

100 alunos — 60 não têm 15 anos; 800 alunos — x não têm 15 anos $\Big\}$ $\frac{100}{800} = \frac{60}{x} \Rightarrow 100x = 48\,000$; $x = 480$ $\Big\}$ Logo, 480 alunos não têm 15 anos.

Resposta: 480.

3) Possuo um pomar com 120 pés de frutas. Desses pés, 80% são de laranjeiras. Quantas laranjeiras há no meu pomar?

100 pés de frutas — 80 são de laranjas; 120 pés de frutas — x são de laranjas $\Big\}$ $\frac{100}{120} = \frac{80}{x} \Rightarrow 100x = 9600$; $x = 96$ $\Big\}$ Logo, no meu pomar há 96 pés de laranja.

Resposta: 96.

4) Ganho Cr$ 20 000,00 mensais e gasto 25% dessa quantia para pagar o aluguel da casa em que moro. Quanto eu pago de aluguel?

De Cr$ 100,00 — pago Cr$ 25,00; De Cr$ 20 000,00 — pagarei x $\Big\}$ $\frac{100}{20000} = \frac{25}{x} \Rightarrow 100x = 500\,000$; $x = 5\,000$ $\Big\}$ Logo, pago Cr$ 5000,00 de aluguel.

Resposta: Cr$ 5 000,00.

5) Num viveiro existem 300 pássaros, dos quais 75% são canários. Quantos canários existem nesse viveiro?

De 100 pássaros — 75 são canários; De 300 pássaros — x são canários $\Big\}$ $\frac{100}{300} = \frac{75}{x} \Rightarrow 100x = 22\,500$; $x = 225$ $\Big\}$ Logo, existem 225 canários.

Resposta: 225.

6) Recebi Cr$ 1 500,00. Fui à feira e gastei 50% desse dinheiro. Quanto gastei na feira?

De Cr$ 100,00 — gastei Cr$ 50,00; De Cr$ 1.500,00 — gastarei x $\Big\}$ $\frac{100}{1500} = \frac{50}{x} \Rightarrow 100x = 75\,000$; $x = 750$ $\Big\}$ Logo, gastei Cr$ 750,00

Resposta: Cr$ 750,00.

7) Num pasto existem 1 400 cabeças de gado, das quais 95% são vacas. Quantas vacas há nesse pasto?

De 100 cabeças — 95 são de vacas; De 1 400 cabeças — x são de vacas $\Big\}$ $\frac{100}{1400} = \frac{95}{x} \Rightarrow 100x = 133\,000$; $x = 1330$ $\Big\}$ Logo, há 1 330 vacas no pasto.

Resposta: 1 330.

Conhecendo a porcentagem de uma quantidade qualquer, podemos determinar a **quantos por cento** essa porcentagem corresponde àquela quantidade.

Observe este problema:

Na minha classe existem 40 alunos, dos quais 24 são meninas. Quantos por cento de meninas existem na minha classe?

Em [40] alunos existem [24] meninas.
Logo, em [100] alunos existirão [x] meninas.

Alunos e meninas são grandezas diretamente proporcionais.

$$\frac{40}{100} = \frac{24}{x} \Rightarrow 40 \cdot x = 24 \cdot 100$$
$$40x = 2\,400$$
$$x = 2\,400 : 40 = 60$$

Logo, na minha classe, 60% dos alunos são meninas.

EXERCÍCIOS

1) Dos Cr$ 1 200,00 que possuía gastei Cr$ 300,00. Quantos por cento do que possuía eu gastei?

De Cr$ 1 200,00 gastei Cr$ 300,00
De Cr$ 100,00 gastei x

$\frac{1200}{100} = \frac{300}{x} \Rightarrow 1200x = 30000$; $x = 25$

Logo, gastei 25% do que possuía.

Resposta: 25%.

2) Em minha estante existem 200 livros. Sabendo que desses livros 80 são de Matemática, quantos por cento de livros desta matéria existem na estante?

Em 200 livros — 80 de Matemática
Em 100 livros — x de Matemática

$\frac{200}{100} = \frac{80}{x} \Rightarrow 200x = 8\,000$; $x = 40$

Logo, 40% dos livros da estante são de Matemática.

Resposta: 40%.

3) Na festa do meu aniversário compareceram 80 pessoas. Sabendo que das pessoas que compareceram 44 eram meninas, quantos por cento de meninas estiveram na festa?

80 pessoas — 44 meninas
100 pessoas — x meninas

$\frac{80}{100} = \frac{44}{x} \Rightarrow 80x = 4\,400$; $x = 55$

Logo, 55% das pessoas eram meninas.

Resposta: 55%.

Se conhecemos a porcentagem de uma quantidade qualquer e a quantos por cento essa porcentagem corresponde, podemos determinar a quantidade.

Veja:

Gastei Cr$ 50,00 da minha mesada. Sabendo que o que gastei corresponde a 20% do que recebo mensalmente, qual é o valor da minha mesada?

Cr$ 50,00 ———— 20%
x ———— 100%

$$\frac{50}{x} = \frac{20}{100} \Rightarrow 20x = 50 \cdot 100$$
$$20x = 5\,000$$
$$x = 250$$

Logo: a minha mesada é de Cr$ 250,00.

RESOLVA OS PROBLEMAS

1) Gastei 15% do que possuía ao comprar uma camisa de Cr$ 300,00. Quanto possuía?

15% — Cr$ 300,00
100% — x

$\frac{15}{100} = \frac{300}{x} \Rightarrow x = 30\,000 : 15$; $x = 2\,000$

Logo, possuía Cr$ 2 000,00.

Resposta: Cr$ 2 000,00.

2) 30% das rosas do meu jardim são brancas. Sabendo que no meu jardim existem seis rosas brancas, determine a quantidade de rosas do meu jardim.

30 % —— 6 rosas
100 % —— x

$\frac{30}{100} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 600 : 30$
$x = 20$

Logo, no meu jardim existem 20 rosas.

Resposta: 20

3) Uma mistura de água e açúcar contém 4,9 g de açúcar. Calcule o "peso" da mistura, sabendo que a quantidade de açúcar corresponde a 35% da mistura.

4,9 g —— 35 %
x —— 100 %

$\frac{4,9}{x} = \frac{35}{100} \Rightarrow x = 490 : 35$
$x = 14$

Logo, o peso da mistura é de 14 g.

Resposta: 14 g.

4) 12% dos moradores de uma cidade são estrangeiros. Qual é a população dessa cidade, sabendo que o número de estrangeiros é 2 400?

12 % —— 2 400
100 % —— x

$\frac{12}{100} = \frac{2\,400}{x} \Rightarrow x = 240\,000 : 12$
$x = 20\,000$

Logo, a população da cidade é de 20 000 habitantes.

Resposta: 20 000 hab.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Represente, usando o símbolo por cento, as seguintes razões centesimais:

1) $\frac{8}{100}$ = 8 % 2) $\frac{13}{100}$ = 13 % 3) $\frac{39}{100}$ = 39 % 4) $\frac{17}{100}$ = 17 %

5) $\frac{23}{100}$ = 23 % 6) $\frac{43}{100}$ = 43 % 7) $\frac{2}{100}$ = 2 % 8) $\frac{33}{100}$ = 33 %

9) $\frac{71}{100}$ = 71 % 10) $\frac{123}{100}$ = 123 % 11) $\frac{145}{100}$ = 145 % 12) 82 : 100 = 82 %

b) Represente na forma de razões centesimais:

1) 5% = $\frac{5}{100}$ 2) 14% = $\frac{14}{100}$ 3) 19% = $\frac{19}{100}$ 4) 24% = $\frac{24}{100}$

5) 45% = $\frac{45}{100}$ 6) 54% = $\frac{54}{100}$ 7) 6% = $\frac{6}{100}$ 8) 87% = $\frac{87}{100}$

9) 112% = $\frac{112}{100}$ 10) 251% = $\frac{251}{100}$ 11) 105% = $\frac{105}{100}$ 12) 175% = $\frac{175}{100}$

c) Represente, usando o símbolo por cento, as seguintes razões não-centesimais:

1) $\frac{2}{5}$ = 40 % 2) $\frac{3}{6}$ = 50 % 3) $\frac{2}{25}$ = 8 % 4) $\frac{1}{10}$ = 10 %

5) $\frac{6}{20}$ = 30 % 6) $\frac{2}{4}$ = 50 % 7) $\frac{8}{40}$ = 20 % 8) $\frac{9}{50}$ = 18 %

9) $\frac{4}{8}$ = 50 % 10) 4 : 16 = 25 % 11) 23 : 46 = 50 % 12) 9 : 12 = 75 %

d) Represente, usando o símbolo por cento, os seguintes numerais:

1) 0,4 = 40 % 2) 0,23 = 23 % 3) 0,01 = 1 % 4) 0,1 = 10 %

5) 0,324 = 32,4 % 6) 0,827 = 82,7 % 7) 1,00 = 100 % 8) 0,005 = 0,5 %

9) 1,21 = 121 % 10) 0,30 = 30 % 11) 0,914 = 91,4 % 12) 0,413 = 41,3 %

e) Escreva na forma de numerais decimais:

1) 4% = 0,04 2) 28% = 0,28 3) 10% = 0,10 4) 32,6% = 0,326

5) 12,8% = 0,128 6) 45% = 0,45 7) 85% = 0,85 8) 16% = 0,16

9) 95,4% = 0,954 10) 17,25% = 0,1725 11) 140% = 1,40 12) 250% = 2,50

f) Dê o significado das sentenças:

1) 5% dos alunos do meu colégio têm 18 anos:

de cada 100 alunos do meu colégio, cinco tem 18 anos.

2) Meu pai aumentou minha mesada em 20%:

de cada Cr$ 100,00 da minha mesada, meu pai aumentou Cr$ 20,00.

3) O índice de mortalidade infantil de um país é 5%:

de cada 100 crianças que nascem num país, cinco não sobrevivem

4) O ar contém 79% de nitrogênio, em volume:

de cada 100 ℓ de ar, 79 ℓ são de nitrogênio.

5) 80% da extensão de uma estrada são asfaltados:

de cada 100 km de uma estrada, 80 km são asfaltados.

g) Resolva os seguintes problemas:

1) Calcule 15% de Cr$ 300,00. (Cr$ 45,00)

2) Determine 32% de 1 500. (480)

3) Ache 40% de 180 kg. (72 kg)

4) Calcule 85% de 400 balas. (340 balas)

5) Quanto é 60% de Cr$ 8 000,00? (Cr$ 4 800,00)

6) Determine 70% de 70 ℓ. (49 ℓ)

7) Ache 50% de Cr$ 500,00. (Cr$ 250,00)

8) Quanto é 180% de 60? (108)

9) Calcule 2% de 200. (4)

10) Determine 4% de 50. (2)

11) Num concurso compareceram 200 candidatos, dos quais 170 foram aprovados. A quantos por cento corresponde o número de candidatos aprovados? (85%)

12) Numa gaveta existem 12 pares de meias. Sabendo que 75% desses pares são de meias coloridas, determine o número de pares de meias não-coloridas. (3)

13) Numa casa comercial em liquidação, nas compras acima de Cr$ 500,00, o cliente tem um desconto de 5%. Quanto que um cliente pagará por uma compra de Cr$ 3 500,00? (Cr$ 3 325,00)

14) Certo dia resolvi presentear meus três filhos, distribuindo Cr$ 1 200,00. Desta quantia, Marco recebeu 40%, Rogério 35% e Lígia 25%. Quanto recebeu cada um de meus filhos? (Cr$ 480,00; Cr$ 420,00 e Cr$ 300,00)

h) Qual é maior:

1) 2% de 50 ou 1% de 100? R.: São iguais.

2) 4% de 200 ou 10% de 80? R.: São iguais.

3) 15% de 300 ou 20% de 250? R.: 20% de 250.

4) 30% de 500 ou 50% de 300? R.: São iguais.

5) 50% de 400 ou 40% de 500? R.: São iguais.

6) 20% de 200 ou 25% de 180? R.: 25% de 180.

7) 60% de 700 ou 50% de 840? R.: São iguais.

8) 80% de 900 ou 70% de 1 000? R.: 80% de 900.

9) 5% de 180 ou 6% de 150? R.: São iguais.

10) 8% de 50 ou 3% de 200? R.: 3% de 200.

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) A quantos por cento correspondem:

1) 5 ℓ de 20 ℓ? R.: 25 %
2) 8 m^3 de 16 m^3? R.: 50 %
3) Cr$ 50,00 de Cr$ 250,00? R.: 20 %
4) 4,8 g de 12 g? R.: 40 %
5) 54 de 60? R.: 90 %
6) 18 m^2 de 300 m^2? R.: 6 %

b) Responda:

1) 20 ℓ correspondem a 40% de que volume? R.: 50 ℓ
2) 120 m^2 correspondem a 20% de que área? R.: 600 m^2
3) 15 m correspondem a 40% de que comprimento? R.: 37,5 m

c) Resolva os problemas:

1) Uma fábrica possui 500 operários, dos quais 100 são mulheres. A quantos por cento dos operários correspondem as mulheres? (20 %)

2) Suponha que na sua classe existam 40 alunos e, dentre eles, 16 são meninas. Quantos por cento de meninas existem na sua classe? (40 %)

3) Num pomar existem 300 pés de laranjas, dos quais 45 são de laranjas-lima. Determine a quantos por cento correspondem os pés de laranjas-lima. (15 %)

4) Numa viagem, um trem transportou 800 passageiros, dos quais 18% eram crianças. Qual o número de crianças e de adultos que estavam nesse trem? (144 crianças e 656 adultos)

5) Dos 30 passageiros de um ônibus, 10% são estrangeiros. Quantos passageiros desse ônibus são estrangeiros? (3)

6) Numa partida de futebol, compareceram 60 000 espectadores. Desses espectadores, 20% são mulheres e 15% são crianças. Quantas mulheres, quantos homens e quantas crianças assistiram a essa partida de futebol? (12 000 mulheres; 39 000 homens e 9 000 crianças)

7) Um colégio possui 1 200 alunos, dos quais 95% foram aprovados. Calcule o número de estudantes que foram reprovados. (60)

8) As 20 roseiras que se encontram num jardim correspondem a 8% do total das plantas aí existentes. Qual é o número de plantas existentes nesse jardim? (250)

9) Uma manada é formada por 4 800 bois. 35% desses animais são destinados ao corte. Determine quantos bois serão abatidos. (1 680)

10) Os 600 000 habitantes brasileiros de uma cidade correspondem a 80% do total de seus habitantes. Determine a população dessa cidade e o número de habitantes estrangeiros. (750 000 e 150 000)

11) Uma mistura é constituída de 60 ℓ de álcool e 20 ℓ de água. Determine a quantos por cento corresponde o volume de água dessa mistura. (25 %)

12) Um dos funcionários de uma firma ganha 6% sobre as vendas que ele efetua. No fim do mês, recebeu Cr$ 6 000,00 de comissão. Calcule o valor total das vendas que esse funcionário efetuou nesse mês.

(Cr$ 100 000,00)

JUROS SIMPLES

NOÇÃO DE JURO

Para compreender bem o que é juro, vamos considerar o seguinte fato.

Suponha que o seu pai não tem casa própria e que vocês moram numa casa alugada. Vamos supor também que o valor da casa em que vocês moram seja de Cr$ 1 600 000,00 e que pagam Cr$ 8 000,00 por mês de aluguel. Este dinheiro que vocês pagam mensalmente representa uma compensação que o dono da casa deve receber, pois vocês estão usufruindo de uma coisa que é dele. Pois bem, essa compensação em dinheiro que o dono da casa recebe mensalmente tem o nome de **juro**. Qual é a razão entre a quantia que vocês pagam mensalmente e o valor da casa?

A razão é: $\dfrac{\text{Cr\$ } 8\,000{,}00}{\text{Cr\$ } 1\,600\,000{,}00} = \dfrac{1}{200} = 0{,}005$

Isto significa que o que vocês pagam por mês representa cinco milésimos (0,005) do valor da casa, ou seja, do capital do dono da casa.

Você já sabe que 0,005 é o mesmo que 0,5%. Então, o dono da casa recebe uma compensação ou um juro de 0,5% ao mês. Portanto, temos:

- valor da casa ⟶ **capital** do dono da casa (Cr$ 1 600 000,00)
- aluguel ⟶ **juros** que o dono da casa recebe (Cr$ 8 000,00)
- razão $\dfrac{\text{aluguel}}{\text{valor da casa}}$ ⟶ **taxa de juro** (0,5% ao mês)

Consideremos outro fato.

Admita que o seu pai empreste Cr$ 600 000,00 a um amigo e que ele lhe devolva esta quantia depois de 1 ano. Evidentemente, seu pai deverá receber deste amigo uma compensação em dinheiro pelo empréstimo efetuado. Suponha, então, que, terminado o prazo do empréstimo (1 ano), seu pai receba do amigo a quantia de Cr$ 660 000,00.

Temos, então:

- valor emprestado ⟶ **capital** do seu pai (Cr$ 600 000,00)
- compensação pelo empréstimo ⟶ **juros** que o seu pai recebe (Cr$ 660 000,00 − Cr$ 600 000,00 = = Cr$ 60 000,00)
- razão $\dfrac{\text{compensação recebida}}{\text{valor emprestado}}$ ⟶ **taxa de juro** $\dfrac{60\,000}{600\,000} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$, ou seja, 10% ao ano.

Com base nesses fatos, podemos concluir que:

- **capital**: é quantia que se emprega;
- **juros**: é compensação ou rendimento que se recebe pelo capital empregado durante um certo tempo;
- **taxa**: é razão por cento entre a compensação (juros) e a quantia empregada (capital), numa unidade de tempo (dia, mês ou ano). A taxa indica o rendimento de um capital fixo (100) na unidade de tempo.

Para resolver os problemas que envolvem juros, costuma-se empregar uma fórmula que se consegue através de uma regra de três composta. Veja:

Se um capital fixo (100) rende i em 1 ano, quanto renderá o capital C em t anos?

100 ——— i ——— 1 ano

C ——— x ——— t anos

(direta, direta)

$$\Rightarrow \frac{i}{x} = \frac{100 \cdot 1}{C \cdot t} \Rightarrow x = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$$

Como x está representando o rendimento do capital, podemos substituí-la pela letra j (juros).

Então, a fórmula para resolver problemas de juros é a seguinte:

$j = \dfrac{C \cdot i \cdot t}{100}$	**Atenção:** nesta fórmula, a taxa (i) e o tempo (t) devem ser usados na mesma unidade (dia, mês ou ano).

Veja este exemplo:

Você emprestou a um amigo a quantia de Cr$ 500,00 a 8% ao ano. Quanto deverá receber de juros após 2 anos?

C = Cr$ 500,00 $\quad$ t = 2 anos
i = 8% ao ano $\quad$ j = ?

$$\Longrightarrow j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \Longrightarrow j = \frac{500 \cdot 8 \cdot 2}{100} = 80$$

Deverei receber Cr$ 80,00 de juros.

AGORA RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS

1) Calcule os juros produzidos por um capital de Cr$ 85 000,00, quando aplicado durante 3 anos a 12,5% ao ano.

C = Cr$ 85000,00
t = 3 anos
i = 12,5 % ao ano
j = ?

$$\Longrightarrow j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \quad j = \frac{85000 \cdot 12{,}5 \cdot 3}{100} \quad j = 31\,875$$

Resposta: Juros de Cr$ 31 875,00.

2) No dia do seu aniversário, você recebeu a quantia de Cr$ 12 000,00 e, logo a seguir, a depositou num banco, a 10% ao ano. Quanto você terá em seu próximo aniversário?

C = Cr$ 12 000,00
i = 10 % ao ano
t = 1 ano
j = ?

$$\Longrightarrow j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \quad j = \frac{12000 \cdot 10 \cdot 1}{100} \quad j = 1\,200$$

Resposta: Receberei Cr$ 1 200,00 de juros. Logo, terei Cr$ 13 200,00.

Observe outro tipo de problema envolvendo juros.

Um certo capital foi emprestado durante 5 meses à taxa de 2% ao mês e rendeu Cr$ 8 000,00 de juros. Qual foi o capital emprestado?

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \Rightarrow C \cdot i \cdot t = 100 \cdot j$$

$$\boxed{C = \frac{100 \cdot j}{i \cdot t}}$$

t = 5 meses
i = 2% ao mês
j = Cr$ 8 000,00
C = ?

$$C = \frac{100 \cdot 8\,000}{2 \cdot 5}$$

$$C = 80\,000$$

O capital foi de Cr$ 80 000,00.

RESOLVA MAIS ESTES PROBLEMAS

1) Recebi Cr$ 1 500,00 por uma quantia que emprestei pelo prazo de 8 meses à taxa de 0,5% ao mês. Que quantia eu emprestei?

j = Cr$ 1 500,00
t = 8 meses
i = 0,5 ao mês
C = ?

$$\Longrightarrow C = \frac{100 \cdot j}{i \cdot t} \quad C = \frac{100 \cdot 1500}{0{,}5 \cdot 8} \quad C = 37\,500$$

Resposta: Emprestei Cr$ 37 500,00.

2) Uma pessoa emprestou uma quantia durante 40 dias à taxa de 0,01% ao dia. Sabendo que ao terminar o prazo essa pessoa receberá Cr$ 4 000,00 de juros, que quantia ela emprestou?

t = 40 dias
i = 0,01 % ao dia
j = Cr$ 4000,00
C = ?

$$\Longrightarrow C = \frac{100 \cdot j}{i \cdot t} \quad C = \frac{100 \cdot 4000}{0{,}01 \cdot 40} \quad C = 1\,000\,000$$

Resposta: Emprestou Cr$ 1 000 000,00.

Vamos ver mais um tipo de problema.

Se você tomar emprestado numa agência bancária a quantia de Cr$ 50 000,00, pagará, após 2 anos, Cr$ 36 000,00 de juros. Qual é a taxa dessa agência?

$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \Rightarrow C \cdot i \cdot t = 100 \cdot j$

$\boxed{i = \frac{100 \cdot j}{C \cdot t}}$

C = Cr$ 50 000,00
t = 2 anos
j = Cr$ 36 000,00
i = ?

$i = \frac{100 \cdot 36\,000}{50\,000 \cdot 2}$

$i = 36\%$

A taxa é de 36% ao ano.

Com base neste exemplo, resolva os problemas:

1) A que taxa você deverá empregar Cr$ 30 000,00 durante 9 meses para que este capital lhe renda Cr$ 2 700,00 de juros?

C = Cr$ 30 000,00
t = 9 meses
j = Cr$ 2 700,00
i = ?

$i = \frac{100 \cdot j}{C \cdot t}$ $i = \frac{100 \cdot 2\,700}{30\,000 \cdot 9}$ $i = 1$

Resposta: 1 % ao mês.

2) Disponho de Cr$ 120 000,00 e quero aplicá-los durante 280 dias, de modo que consiga receber Cr$ 16 800,00 de juros. A que taxa devo aplicar o meu capital?

C = Cr$ 120 000,00
t = 280 dias
j = Cr$ 16 800,00
i = ?

$i = \frac{100 \cdot j}{C \cdot t}$ $i = \frac{100 \cdot 16\,800}{120\,000 \cdot 280}$ $i = 0{,}05$

Resposta: Deverei aplicá-lo a 0,05 % ao dia.

Acompanhe a resolução de mais um problema.

Possuo Cr$ 45 000,00 disponíveis e quero empregá-los à taxa de 18% ao ano, de modo que consiga receber Cr$ 16 200,00 de juros. Durante quanto tempo devo empregar o meu capital?

$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \Rightarrow C \cdot i \cdot t = 100 \cdot j$

$\boxed{t = \frac{100 \cdot j}{C \cdot i}}$

j = Cr$ 16 200,00
C = Cr$ 45 000,00
i = 18% ao ano
t = ?

$t = \frac{100 \cdot 16\,200}{45\,000 \cdot 18}$

$t = 2$

Devo empregar meu capital durante 2 anos.

RESOLVA ESTES PROBLEMAS

1) Suponha que uma pessoa aplique Cr$ 18 000,00 a 20% ao ano. Durante quanto tempo esse capital deverá ser aplicado para que renda Cr$ 18 000,00 de juros?

C = Cr$ 18 000,00
i = 20 % ao ano
t = ?
j = Cr$ 18 000,00

$t = \frac{100 \cdot j}{C \cdot i}$ $t = \frac{100 \cdot 18\,000}{18\,000 \cdot 20}$ $t = 5$

Resposta: Deve ser aplicado durante 5 anos.

2) Durante quanto tempo devo aplicar Cr$ 25 000,00 a 4% ao mês, para que esse capital me renda Cr$ 5 000,00 de juros?

t = ?
C = Cr$ 25 000,00
i = 4 % ao mês
j = Cr$ 5 000,00

$t = \frac{100 \cdot j}{C \cdot i}$ $t = \frac{100 \cdot 5000}{25000 \cdot 4}$ $t = 5$

Resposta: 5 meses

ALGO MUITO IMPORTANTE: AS CONVERSÕES

As fórmulas abaixo devem ser usadas somente quando ocorrer:

- taxa **anual** e tempo em **anos**;
- taxa **mensal** e tempo em **meses**;
- taxa **diária** e tempo em **dias**.

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \Longrightarrow C = \frac{100 \cdot j}{i \cdot t} \quad i = \frac{100 \cdot j}{C \cdot t} \quad t = \frac{100 \cdot j}{C \cdot i}$$

Quando essas condições não ocorrem, deve-se fazer a conversão da unidade de tempo e a da taxa.

A conversão da unidade de tempo

Vejamos um caso de conversão.

Converter 45 dias em meses.

30 dias —— 1 mês

45 dias —— x

$$\Longrightarrow \frac{30}{45} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{45}{30}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } 1{,}5$$

Então, 45 dias correspondem a 1,5 mês.

Converta:

1) 90 dias em meses.
30 dias — 1 mês
90 dias — x
$x = 3$

2) 300 dias em meses.
30 dias — 1 mês
300 dias — x
$x = 10$

3) 315 dias em meses.
30 dias — 1 mês
315 dias — x
$x = 10{,}5$

Observe outro caso de conversão.

Converter 200 dias em anos.

360 dias —— 1 ano

200 dias —— x

$$\Longrightarrow \frac{360}{200} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{200}{360} = \frac{5}{9}$$

Então, 200 dias correspondem a $\frac{5}{9}$ ano.

Converta:

1) 120 dias em anos.
360 dias — 1 ano
120 dias — x
$x = \frac{1}{3}$

2) 750 dias em anos.
360 dias — 1 ano
750 dias — x
$x = \frac{25}{12}$ ou $2\frac{1}{12}$

3) 1 080 dias em anos.
360 dias — 1 ano
1 080 dias — x
$x = 3$

Agora vamos converter 8 meses em anos.

12 meses —— 1 ano

8 meses —— x

$$\Longrightarrow \frac{12}{8} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Então, 8 meses correspondem a $\frac{2}{3}$ ano.

Converta:

1) 6 meses em anos.
12 meses — 1 ano
6 meses — x
$x = \frac{1}{2}$

2) 18 meses em anos.
12 meses — 1 ano
18 meses — x
$x = \frac{3}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$

3) 60 meses em anos.
12 meses — 1 ano
60 meses — x
$x = 5$

Acompanhe a resolução dos seguintes problemas.

1) Converter 5 meses e 18 dias em dias.

5 [meses] e 18 dias = 5 × [30 dias] + 18 dias = 150 dias + 18 dias = 168 dias

Então, 5 meses e 18 dias correspondem a 168 dias.

2) Converter 2 anos e 3 meses em meses.

2 [anos] e 3 meses = 2 × [12 meses] + 3 meses = 24 meses + 3 meses = 27 meses

Então, 2 anos e 3 meses correspondem a 27 meses.

3) Converter 4 anos, 2 meses e 10 dias em dias.

4 [anos] 2 meses e 10 dias = 4 × [360 dias] + 2 × 30 dias + 10 dias = 1 510 dias

Então, 4 anos, 2 meses e 10 dias correspondem a 1 510 dias.

Converta em meses:

1) 5 anos e 2 meses = 5 × 12 + 2 = 60 + 2 = 62 meses
2) 8 anos e 4 meses = 8 × 12 + 4 = 96 + 4 = 100 meses
3) 2 anos e 11 meses = 2 × 12 + 11 = 24 + 11 = 35 meses
4) 6 anos e 1 mês = 6 × 12 + 1 = 72 + 1 = 73 meses

Converta em dias:

1) 5 meses e 10 dias = 5 × 30 + 10 = 150 + 10 = 160 dias
2) 2 anos e 25 dias = 2 × 360 + 25 = 720 + 25 = 745 dias
3) 3 anos e 2 meses = 3 × 360 + 2 × 30 = 1080 + 60 = 1140 dias
4) 2 anos, 8 meses e 12 dias = 2 × 360 + 8 × 30 + 12 = = 720 + 240 + 12 = 972 dias

Agora vamos examinar um problema.

Determine os juros produzidos por Cr$ 40 000,00, quando aplicados a 4% ao mês durante 2 anos.

C = Cr$ 40 000,00

i = 4% ao mês

t = 2 anos ⟺ 2 × 12 meses = 24 meses

j = ?

Logo, $j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$

$j = \frac{40\,000 \cdot 4 \cdot 24}{100} = 38\,400$

Taxa e tempo em meses.

Os juros serão de Cr$ 38 400,00.

RESOLVA OS PROBLEMAS

1) Um capital de Cr$ 4 500,00 foi aplicado a 0,05% ao dia durante 5 meses. Quanto rendeu este capital?

C = Cr$ 4 500,00
i = 0,05 % ao dia
t = 5 meses = 150 dias
j = ?

⟹ $j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$ $j = \frac{4500 \cdot 0{,}05 \cdot 150}{100}$ $j = 337{,}50$

Resposta: O capital rendeu Cr$ 337,50.

2) Determine o capital que aplicado a 3% ao mês durante 3 anos rendeu Cr$ 2 160,00.

C = ?
t = 3 anos = 36 meses
i = 3 % ao mês
j = Cr$ 2 160,00

⟹ $C = \frac{100 \cdot j}{i \cdot t}$ $C = \frac{100 \cdot 2\,160}{3 \cdot 36}$ $C = 2\,000$

Resposta: O capital aplicado foi de Cr$ 2 000,00.

3) Emprestando Cr$ 68 000,00 durante 300 dias, uma pessoa recebeu Cr$ 13 600,00 de juros. A que taxa ao mês o capital foi emprestado?

C = Cr$ 68 000,00
t = 300 dias = 10 meses
j = Cr$ 13 600,00
i = ?

⟹ $i = \frac{100 \cdot j}{C \cdot t}$ $i = \frac{100 \cdot 13\,600}{68\,000 \cdot 10}$ $i = 2$

Resposta: 2 % ao mês

4) Calcule os juros produzidos por Cr$ 600,00, quando aplicados a 4% ao mês durante 3 anos e 4 meses.

j = ?
C = Cr$ 600,00
i = 4% ao mês
t = 3 anos e 4 meses = 40 meses

$\Longrightarrow$ $j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$; $j = \frac{600 \cdot 4 \cdot 40}{100}$; $j = 960$

Resposta: Cr$ 960,00.

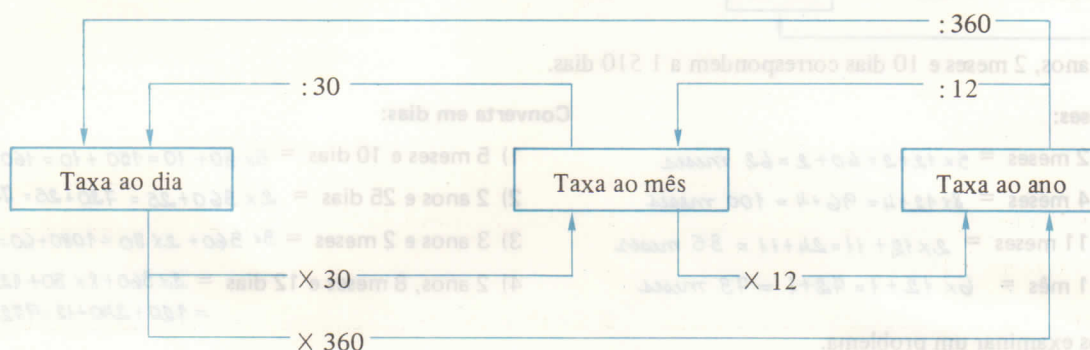
5) Um capital de Cr$ 8 000,00, aplicado a 3% ao mês, rendeu Cr$ 4 800,00 de juros. Qual o tempo de aplicação desse capital?

C = Cr$ 8 000,00
i = 3% ao mês
j = Cr$ 4 800,00
t = ?

$\Longrightarrow$ $t = \frac{100 \cdot j}{C \cdot i}$; $t = \frac{100 \cdot 4800}{8000 \cdot 3}$; $t = 20$

Resposta: 20 meses.

- **A conversão da taxa**

Muitas vezes, ao invés de converter a unidade de tempo, é preferível fazer a conversão da taxa. A tabela abaixo ensina como fazer este tipo de conversão.

Deste modo temos que:

0,05% ao dia = 0,05 · 30 = 1,5% ao mês

4% ao mês = 4 · 12 = 48% ao ano

Observe a resolução deste problema.

Determine os juros produzidos por Cr$ 12 000,00 empregados a 3% ao mês, durante 5 anos.

C = Cr$ 12 000,00		C = Cr$ 12 000,00
t = 5 anos = 5 · 12 = 60 meses	ou	t = 5 anos
i = 3% ao mês		i = 3% ao mês = 3 · 12 = 36% ao ano
j = ?		j = ?
$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} = \frac{12\,000 \cdot 3 \cdot 60}{100}$		$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} = \frac{12\,000 \cdot 36 \cdot 5}{100}$
j = 21 600		j = 21 600

Então, os juros correspondem a Cr$ 21 600,00.

Resolva os problemas que seguem:

1) Calcule quanto rendeu de juros o capital de Cr$ 4 800,00, emprestado durante 90 dias, à taxa de 5% ao mês.

j = ?
C = Cr$ 4 800,00
t = 90 dias = 3 meses
i = 5% ao mês

$\Longrightarrow$ $j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$; $j = \frac{4800 \cdot 5 \cdot 3}{100}$; $j = 720$

ou

j = ?
C = Cr$ 4 800,00
t = 90 dias
i = 5% ao mês = $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ ao dia

$\Rightarrow$ $j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$; $j = \frac{4\,800 \cdot 90 \cdot \frac{1}{6}}{100}$; $j = 720$

Resposta: Cr$ 720,00.

2) Determine o capital que, aplicado a 4% ao mês, durante 2 anos e 6 meses, rende Cr$ 108 000,00 de juros.

C = ?
i = 4% ao mês
t = 2 anos e 6 meses = 30 meses
j = Cr$ 108 000,00

$\Longrightarrow$ $C = \frac{100 \cdot j}{i \cdot t}$; $C = \frac{100 \cdot 108\,000}{4 \cdot 30}$; $C = 90\,000$

ou

C = ?
i = 4% ao mês = 4 · 12 = 48% ao ano novo
t = 2 anos e 6 meses = 2,5 anos
j = Cr$ 108 000,00

$\Longrightarrow$ $C = \frac{100 \cdot j}{i \cdot t}$; $C = \frac{100 \cdot 108\,000}{48 \cdot 2,5}$; $C = 90\,000$

Resposta: Cr$ 90 000,00.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Converta em meses:

1) 1 ano e 2 meses = 14 meses

2) 15 dias = $\frac{1}{2}$ mês

3) 3 anos e 4 meses = 40 meses

4) 10 anos e 5 meses = 125 meses

b) Converta em anos:

1) 6 meses = $\frac{1}{2}$ ano

2) 48 meses = 4 anos

3) 18 meses = 1,5 ano ($\frac{3}{2}$ ano)

4) 30 meses = 2,5 anos ($\frac{5}{2}$ anos)

5) 720 dias = 2 anos

6) 3 meses = $\frac{1}{4}$ ano

7) 8 meses = $\frac{2}{3}$ ano

8) 60 dias = $\frac{1}{6}$ ano

9) 270 dias = $\frac{3}{4}$ ano

10) 4 meses = $\frac{1}{3}$ ano

c) Converta em dias:

1) 5 meses = 150 dias

2) 3 meses e 10 dias = 100 dias

3) 1 ano, 4 meses e 20 dias = 500 dias

4) 2 anos, 2 meses e 20 dias = 800 dias

d) Converta em taxa mensal:

1) 12% ao ano = 1 % ao mês

2) 18% ao ano = 1,5 % ao mês

3) 0,01% ao dia = 0,3 % ao mês

4) 0,2% ao dia = 6 % ao mês

e) Converta em taxa anual:

1) 0,5% ao mês = 6 % ao ano

2) 0,02% ao dia = 7,2 % ao ano

3) 0,05% ao dia = 18 % ao ano

4) 3% ao mês = 36 % ao ano

f) Converta em taxa diária:

1) 6% ao mês = 0,2 % ao dia

2) 1,8% ao mês = 0,06 % ao dia

3) 36% ao ano = 0,1 % ao dia

4) 108% ao ano = 0,3 % ao dia

g) Resolva os problemas:

1) Calcule os juros produzidos por Cr$ 8 000,00 empregados a 4% ao mês, durante dois anos. (Cr$ 7 600,00)

2) Um capital de Cr$ 5 600,00 foi aplicado durante cinco meses, à taxa de 0,06% ao dia. Quanto de juro esse capital produziu? (Cr$ 504,00)

3) Um certo capital, aplicado a 6% ao mês, durante 1 ano e 3 meses, rendeu Cr$ 2 250,00. Determine esse capital. (Cr$ 2 500,00)

4) Determine qual é o capital que, aplicado durante 6 meses à taxa de 12% ao ano, produziu Cr$ 3 600,00 de juros. (Cr$ 5 000,00)

5) Calcule a que taxa anual devem ser aplicados Cr$ 6 000,00 para que produzam Cr$ 720,00 de juros durante 8 meses. (18 %)

6) Um capital de Cr$ 8 500,00 foi emprestado durante 300 dias e produziu Cr$ 5 100,00 de juros. A que taxa mensal esse capital foi emprestado? (6 %)

7) Durante quantos meses um capital de Cr$ 10 000,00 deve ser aplicado a 54% ao ano para produzir Cr$ 1 800,00 de juros? (4 meses)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

Problemas:

1) Calcule os juros produzidos por:

- Cr$ 15 000,00 empregados a 18% ao ano durante 8 meses; (Cr$ 1 800,00)
- Cr$ 30 000,00 empregados a 4% ao mês durante 2 anos e 6 meses; (Cr$ 36 000,00)
- Cr$ 18 000,00 empregados a 0,2% ao dia durante 3 meses e 10 dias; (Cr$ 3 600,00)
- Cr$ 40 000,00 empregados a 6% ao mês durante 150 dias; (Cr$ 12 000,00)
- Cr$ 16 000,00 empregados a 20% ao ano durante 270 dias. (Cr$ 2 400,00)

2) Calcule o capital que produz:

- Cr$ 8 000,00 de juros, durante 150 dias, à taxa de 8% ao mês; (Cr$ 20 000,00)
- Cr$ 1 120,00 de juros, durante 8 meses, à taxa de 24% ao ano; (Cr$ 7 000,00)
- Cr$ 14 500,00 de juros, durante 8 meses e 10 dias, à taxa de 0,4% ao dia; (Cr$ 14 500,00)
- Cr$ 5 400,00 de juros, durante $\frac{3}{4}$ ano, à taxa de 5% ao mês; (Cr$ 12 000,00)
- Cr$ 1 260,00 de juros, durante 60 dias, à taxa de 36% ao ano. (Cr$ 21 000,00)

3) Calcule a que taxa anual deve ser aplicado um capital de:

- Cr$ 6 000,00, durante 6 meses, para produzir Cr$ 1 080,00 de juros; (36 %)
- Cr$ 8 000,00, durante 17 280 dias, para produzir Cr$ 4 800,00 de juros; (1,25 %)
- Cr$ 36 000,00, durante 2 anos e 6 meses, para produzir Cr$ 27 000,00 de juros; (30 %)
- Cr$ 4 800,00, durante 300 dias, para produzir Cr$ 960,00 de juros. (24 %)

4) Calcule durante quanto tempo deve ser aplicado um capital de:

- Cr$ 1 580,00, à taxa de 8% ao mês, para produzir Cr$ 1 896,00 de juros; (1 ano e 3 meses)
- Cr$ 10 000,00, à taxa de 20% ao ano, para produzir Cr$ 3 000,00 de juros; (1 ano e 6 meses)
- Cr$ 9 000,00, à taxa de 0,05% ao dia, para produzir Cr$ 2 700,00, de juros; (1 ano e 8 meses)
- Cr$ 16 000,00, à taxa de 25% ao ano, para produzir Cr$ 1 000,00 de juros. (3 meses)

5) Um indivíduo depositou, num banco, Cr$ 720 000,00 a prazo fixo. Quanto receberá de juros após 18 meses, sabendo que a taxa é de 42% ao ano? (Cr$ 453 600,00)

6) Uma pessoa guardou em casa Cr$ 80 000,00 durante 20 anos. Qual seria o capital atual dessa pessoa, se ela tivesse aplicado o seu dinheiro nesse tempo a 2% ao mês? (Cr$ 464 000,00)

7) A que taxa anual devo emprestar Cr$ 10 000,00 para que o meu capital duplique em 4 anos? (25 %)

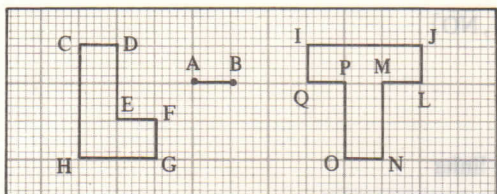
8) Rogério emprestou Cr$ 2 000,00 ao seu irmão Marco, durante 6 meses, a 5% ao mês. Decorrido esse tempo, quanto Marco deve pagar a Rogério? (Cr$ 2 600,00)

9) Emprestei Cr$ 25 000,00 ao meu irmão caçula, a 4% ao mês durante 300 dias, e Cr$ 50 000,00 ao meu irmão mais velho, a 5% ao mês durante 120 dias. De qual dos meus irmãos receberei maior quantia de juros? (Receberei Cr$ 10 000,00 de ambos.)

10) A que taxa devo empregar o meu capital de Cr$ 48 000,00 para que, em 5 anos, possua Cr$ 76 800,00? (12 % ao ano)

Unidade 17 SEGMENTOS E ÂNGULOS

OS SEGMENTOS DE RETA E A CONGRUÊNCIA

Observe a figura:

Nesta figura você encontra vários segmentos de reta. Utilizando o segmento $\overline{AB}$ como unidade de medida de comprimento, ou seja, $m(\overline{AB}) = 1$ u, complete as igualdades que seguem conforme o modelo:

1) $m(\overline{CD}) = 1$ u ou CD = 1 u
2) $m(\overline{CH}) =$ 3 u ou CH = 3 u
3) $m(\overline{HG}) =$ 2 u ou HG = 2 u
4) $m(\overline{FG}) =$ 1 u ou FG = 1 u
5) $m(\overline{EF}) =$ 1 u ou EF = 1 u
6) $m(\overline{DE}) =$ 2 u ou DE = 2 u
7) $m(\overline{IJ}) =$ 3 u ou IJ = 3 u
8) $m(\overline{JL}) =$ 1 u ou JL = 1 u
9) $m(\overline{LM}) =$ 1 u ou LM = 1 u
10) $m(\overline{MN}) =$ 2 u ou MN = 2 u
11) $m(\overline{NO}) =$ 1 u ou NO = 1 u
12) $m(\overline{OP}) =$ 2 u ou OP = 2 u
13) $m(\overline{PQ}) =$ 1 u ou PQ = 1 u
14) $m(\overline{IQ}) =$ 1 u ou IQ = 1 u

Note que dentre esses segmentos há vários com a mesma medida.

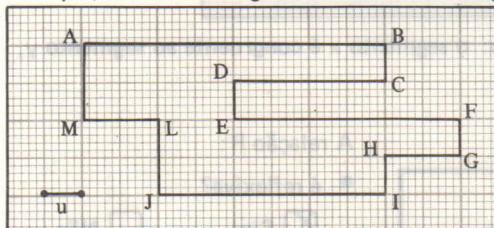
Complete o quadro abaixo, agrupando os segmentos que apresentam a mesma medida:

Segmentos com medida 1 u	Segmentos com medida 2 u	Segmentos com medida 3 u
$\overline{CD}$, $\overline{FG}$, $\overline{EF}$, $\overline{JL}$, $\overline{LM}$, $\overline{NO}$, $\overline{PQ}$, $\overline{IQ}$	$\overline{HG}$, $\overline{DE}$, $\overline{MN}$, $\overline{OP}$	$\overline{CH}$, $\overline{IJ}$

Os segmentos que possuem medidas iguais, na mesma unidade de medida, recebem o nome de **segmentos congruentes**. Então, os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$, por exemplo, são congruentes.

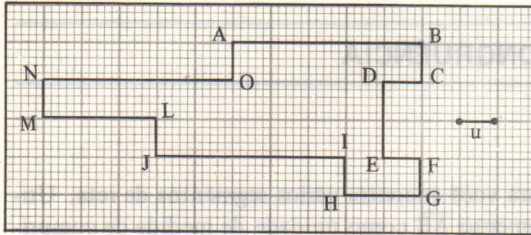
Indicação: $m(\overline{CD}) = m(\overline{EF}) \Longleftrightarrow \overline{CD} \cong \overline{EF}$

VAMOS EXERCITAR

Indique, conforme a figura, a medida do comprimento dos segmentos e agrupe os segmentos congruentes:

1) AB = 8 u
2) BC = 1 u
3) CD = 4 u
4) DE = 1 u
5) EF = 6 u
6) FG = 1 u
7) GH = 2 u
8) HI = 1 u
9) IJ = 6 u
10) JL = 2 u
11) LM = 2 u
12) MA = 2 u

Medida				
1 u	2 u	4 u	6 u	8 u
$\overline{DE}$, $\overline{HI}$, $\overline{FG}$, $\overline{BC}$	$\overline{GH}$, $\overline{JL}$, $\overline{LM}$, $\overline{MA}$	$\overline{CD}$	$\overline{EF}$, $\overline{IJ}$	$\overline{AB}$

A CONGRUÊNCIA DE SEGMENTOS: UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Observe a figura:

Agora considere o conjunto A formado pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{IJ}$ e $\overline{NO}$ e a relação R de A em A definida assim: **o segmento x é congruente ao segmento y.**

$A = \{\overline{AB}, \overline{IJ}, \overline{NO}\}$

Veja os diagramas da relação R.

Diagrama de setas

Diagrama de linha

A relação R é:

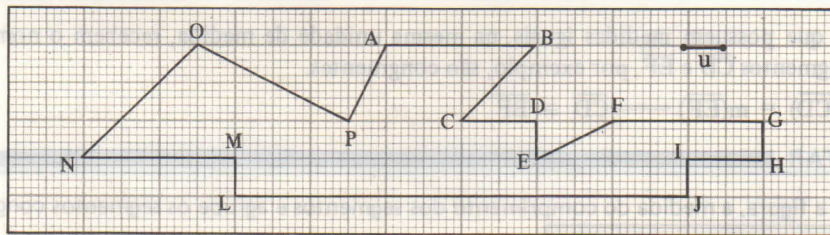
- **reflexiva** – Os diagramas mostram que a relação R permitiu que cada elemento correspondesse a si mesmo.
- **simétrica** – Os diagramas mostram que, mudando a ordem dos elementos de um par qualquer, o novo par também pertence à relação R.
- **transitiva** – Os diagramas mostram que:

$(\overline{AB}, \overline{IJ}) \in R$, $(\overline{IJ}, \overline{NO}) \in R \rightarrow (\overline{AB}, \overline{NO}) \in R$

$(\overline{NO}, \overline{AB}) \in R$, $(\overline{AB}, \overline{NO}) \in R \rightarrow (\overline{NO}, \overline{NO}) \in R$, etc.

Então, como R é reflexiva, simétrica e transitiva simultaneamente, dizemos que R é uma **relação de equivalência.**

VAMOS EXERCITAR

Observe a figura e faça os exercícios abaixo:

1) Sendo $A = \{\overline{AB}, \overline{FG}, \overline{MN}\}$ e a relação R de A em A definida como: **o segmento x é congruente ao segmento y**, faça os diagramas e responda às questões:

A relação R:

- é reflexiva? [X] Sim [ ] Não
- é simétrica? [X] Sim [ ] Não
- é transitiva? [X] Sim [ ] Não

Então, R *é uma relação de equivalência.*

2) Sendo A = {$\overline{BC}$, $\overline{IJ}$, $\overline{NO}$} e a relação R de A em A definida como: **o segmento x é congruente ao segmento y**, faça os diagramas e responda às questões:

Diagrama de setas

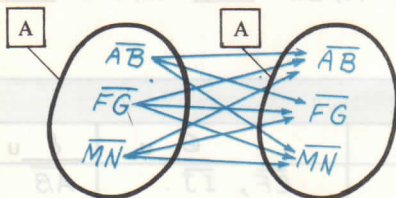
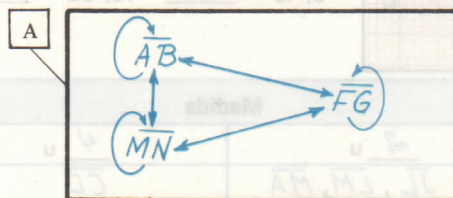
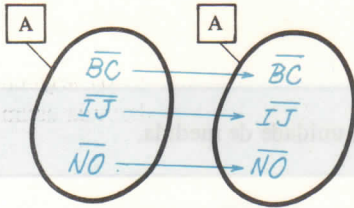
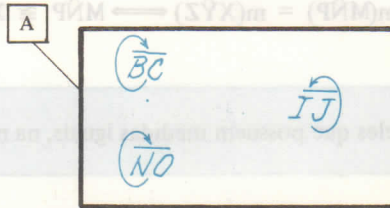
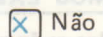



Diagrama de linha

A relação R:

- é reflexiva? ☒ Sim ☐ Não
- é simétrica? ☒ Sim ☐ Não
- é transitiva? ☐ Sim ☒ Não

Então, R *não é uma relação de equivalência.*

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Observe a figura e resolva os exercícios:

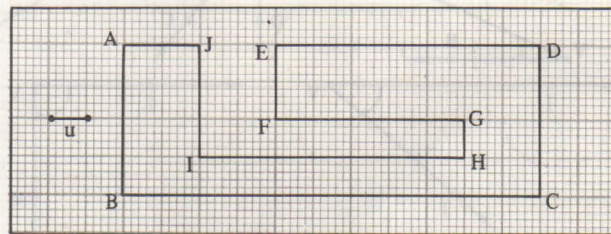
1) Dê a medida dos segmentos:

m($\overline{AB}$) = *4* u m($\overline{FG}$) = *5* u

m($\overline{BC}$) = *11* u m($\overline{GH}$) = *1* u

m($\overline{CD}$) = *4* u m($\overline{HI}$) = *7* u

m($\overline{DE}$) = *7* u m($\overline{IJ}$) = *3* u

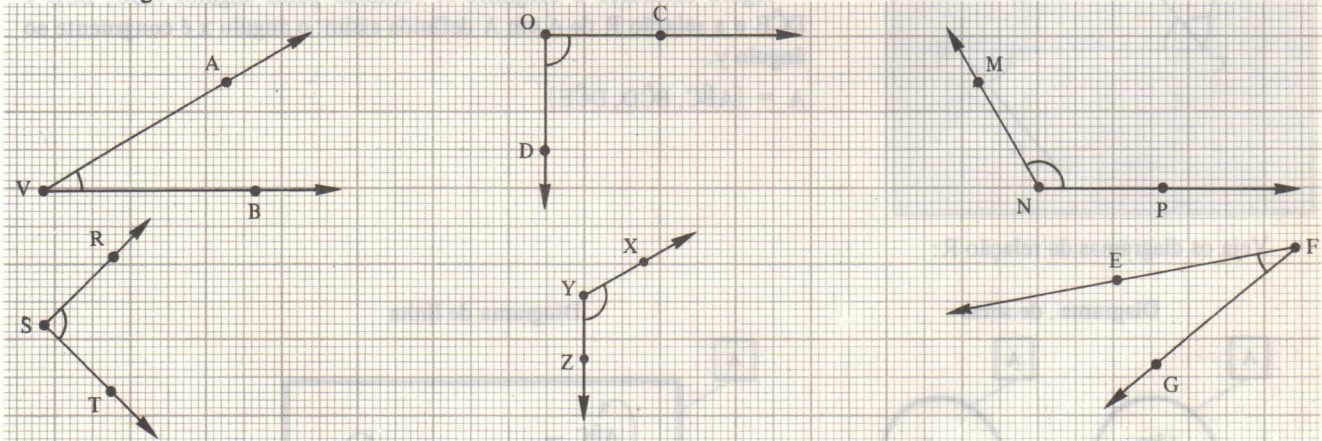
m($\overline{EF}$) = *2* u m($\overline{JA}$) = *2* u

2) Coloque no ☐ o sinal >, < ou ≅:

$\overline{AB}$ < $\overline{BC}$	$\overline{HI}$ > $\overline{AB}$	$\overline{CD}$ < $\overline{FG}$	$\overline{AB}$ ≅ $\overline{CD}$
$\overline{DE}$ > $\overline{CD}$	$\overline{GH}$ < $\overline{FG}$	$\overline{DE}$ ≅ $\overline{HI}$	$\overline{EF}$ < $\overline{BC}$
$\overline{JA}$ ≅ $\overline{EF}$	$\overline{BC}$ > $\overline{IJ}$	$\overline{JA}$ < $\overline{BC}$	$\overline{JA}$ > $\overline{GH}$

3) Sendo A = {$\overline{EF}$, $\overline{GH}$, $\overline{AJ}$} e a relação R de A em A definida como: **o segmento x é congruente ao segmento y**, podemos afirmar que a relação R é de equivalência? Justifique. *(É de equivalência.)*

OS ÂNGULOS E A CONGRUÊNCIA

Observe as figuras:

O C D X Y Z

Essas figuras correspondem a vários ângulos. Usando o seu transferidor, obtenha a medida de cada ângulo:

m(A$\hat{V}$B) = *30°* m(M$\hat{N}$P) = *120°* m(X$\hat{Y}$Z) = *120°*

m(C$\hat{O}$D) = *90°* m(R$\hat{S}$T) = *90°* m(E$\hat{F}$G) = *30°*

Note que há ângulos que possuem medidas iguais. Esses ângulos são chamados **ângulos congruentes.**

Os ângulos $A\hat{V}B$ e $E\hat{F}G$ são congruentes: $m(A\hat{V}B) = m(E\hat{F}G) \Longleftrightarrow A\hat{V}B \cong E\hat{F}G$.

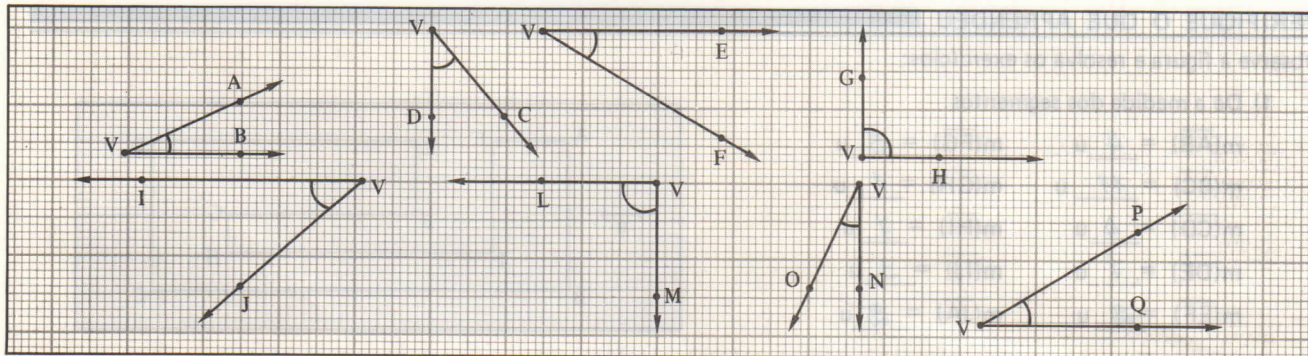
Os ângulos $C\hat{O}D$ e $R\hat{S}T$ são congruentes: $m(C\hat{O}D) = m(R\hat{S}T) \Longleftrightarrow C\hat{O}D \cong R\hat{S}T$.

Os ângulos $M\hat{N}P$ e $X\hat{Y}Z$ são congruentes: $m(M\hat{N}P) = m(X\hat{Y}Z) \Longleftrightarrow M\hat{N}P \cong X\hat{Y}Z$.

Então:

> Ângulos congruentes são aqueles que possuem medidas iguais, na mesma unidade de medida.

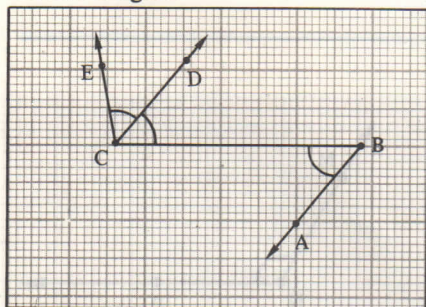
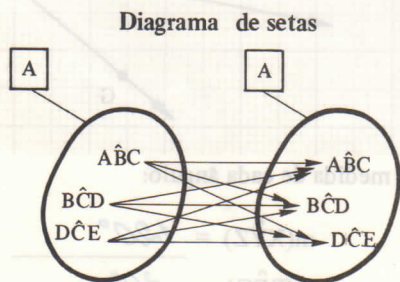
VAMOS EXERCITAR

Dados os ângulos, complete corretamente as igualdades abaixo:

1) $m(A\hat{V}B) =$ 25°　2) $m(C\hat{V}D) =$ 40°　3) $m(E\hat{V}F) =$ 30°　4) $m(G\hat{V}H) =$ 90°

5) $m(I\hat{V}J) =$ 40°　6) $m(L\hat{V}M) =$ 90°　7) $m(N\hat{V}O) =$ 25°　8) $m(P\hat{V}Q) =$ 30°

9) $A\hat{V}B \cong N\hat{V}O$　10) $C\hat{V}D \cong I\hat{V}J$　11) $E\hat{V}F \cong P\hat{V}Q$　12) $G\hat{V}H \cong L\hat{V}M$

A CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS: UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Observe a figura:

Agora considere o conjunto A formado pelos ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $D\hat{C}E$ e a relação R de A em A definida assim: **o ângulo x é congruente ao ângulo y.**

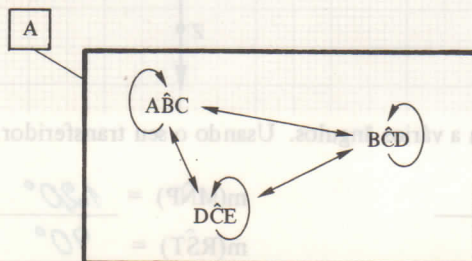
$A = \{A\hat{B}C, B\hat{C}D, D\hat{C}E\}$

Veja os diagramas da relação R:

Diagrama de setas

Diagrama de linha

A relação R é:

- **reflexiva** – Os diagramas mostram que a relação R permitiu que cada elemento correspondesse a si mesmo.
- **simétrica** – Os diagramas mostram que, mudando a ordem dos elementos de um par qualquer, o novo par também pertence à relação R.
- **transitiva** – Os diagramas mostram que:

$(A\hat{B}C, D\hat{C}E) \in R$ e $(D\hat{C}E, B\hat{C}D) \in R$ → $(A\hat{B}C, B\hat{C}D) \in R$

$(B\hat{C}D, A\hat{B}C) \in R$ e $(A\hat{B}C, D\hat{C}E) \in R$ → $(B\hat{C}D, D\hat{C}E) \in R$, etc.

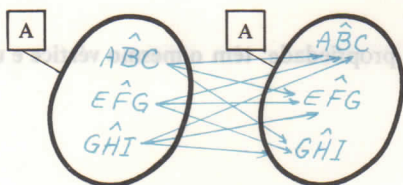
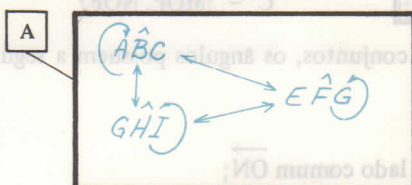
Então, como R é reflexiva, simétrica e transitiva simultaneamente, dizemos que R é **uma relação de equivalência**.

VAMOS EXERCITAR

Observe a figura e faça os exercícios que seguem:

1) Sendo A = $\{A\hat{B}C, E\hat{F}G, G\hat{H}I\}$ e a relação R de A em A definida como: **o ângulo x é congruente ao ângulo** y, faça os diagramas e responda às questões:

Diagrama de setas | **Diagrama de linha**

A: $A\hat{B}C$, $E\hat{F}G$, $G\hat{H}I$ → A: $A\hat{B}C$, $E\hat{F}G$, $G\hat{H}I$

A relação R:

- é reflexiva? [X] Sim [ ] Não
- é simétrica? [X] Sim [ ] Não
- é transitiva? [X] Sim [ ] Não

Então, R *é uma relação de equivalência.*

2) Sendo A = $\{A\hat{B}C, B\hat{C}D, C\hat{D}E\}$ e a relação R de A em A definida como: **o ângulo x é congruente ao ângulo** y, faça os diagramas e responda às questões:

Diagrama de setas | **Diagrama de linha**

A: $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$ → A: $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$

A relação R:

- é reflexiva? [X] Sim [ ] Não
- é simétrica? [X] Sim [ ] Não
- é transitiva? [ ] Sim [X] Não

Então, R *não é uma relação de equivalência.*

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Observe a figura e faça os exercícios que seguem:

1) Dê as medidas dos ângulos e indique os congruentes:

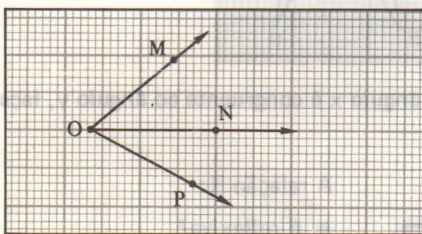
$m(A\hat{B}C)$ = 35°	$m(D\hat{E}F)$ = 40°	$A\hat{B}C \cong C\hat{D}E$
$m(B\hat{C}D)$ = 90°	$m(E\hat{F}G)$ = 90°	$B\hat{C}D \cong E\hat{F}G$
$m(C\hat{D}E)$ = 35°	$m(F\hat{G}H)$ = 40°	$D\hat{E}F \cong F\hat{G}H$

2) Sendo A = $\{A\hat{B}C, B\hat{C}D, C\hat{D}E\}$ e a relação R de A em A definida como: **o ângulo x é congruente ao ângulo** y, podemos afirmar que a relação R é de equivalência? Justifique. (É de equivalência)

Ângulos que possuem o mesmo vértice: Dentre os ângulos que possuem o mesmo vértice, você precisa conhecer:

- os ângulos consecutivos;
- os ângulos adjacentes;
- os ângulos opostos pelo vértice.

ÂNGULOS CONSECUTIVOS

Observe a figura:

Nesta figura você encontra três ângulos: $M\hat{O}N$, $N\hat{O}P$ e $M\hat{O}P$. Vamos formar conjuntos binários com esses ângulos:

A = $\{M\hat{O}N, N\hat{O}P\}$

B = $\{M\hat{O}N, M\hat{O}P\}$

C = $\{M\hat{O}P, N\hat{O}P\}$

Perceba que, em cada um destes conjuntos, os ângulos possuem a seguinte propriedade: **têm o mesmo vértice e um lado comum.**

Veja:

A = $\{M\hat{O}N, N\hat{O}P\} \Longrightarrow$ vértice 0; lado comum $\overrightarrow{ON}$;

B = $\{M\hat{O}N, M\hat{O}P\} \Longrightarrow$ vértice 0; lado comum $\overrightarrow{OM}$;

C = $\{M\hat{O}P, N\hat{O}P\} \Longrightarrow$ vértice 0; lado comum $\overrightarrow{OP}$.

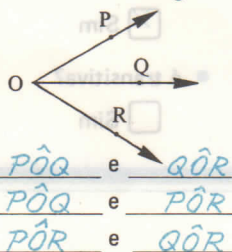
Os ângulos que possuem a seguinte propriedade: **têm o mesmo vértice e um lado comum**, recebem o nome de **ângulos consecutivos.**

Então:

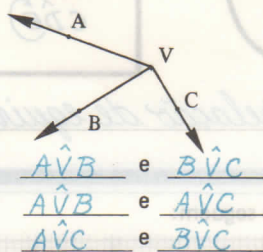
$M\hat{O}N$ e $N\hat{O}P$, $M\hat{O}N$ e $M\hat{O}P$, $M\hat{O}P$ e $N\hat{O}P$ são **ângulos consecutivos.**

VAMOS EXERCITAR

Indique de acordo com a figura os pares de ângulos consecutivos:

1) O, P, Q, R

$P\hat{O}Q$ e $Q\hat{O}R$

$P\hat{O}Q$ e $P\hat{O}R$

$P\hat{O}R$ e $Q\hat{O}R$

2) A, V, B, C

$A\hat{V}B$ e $B\hat{V}C$

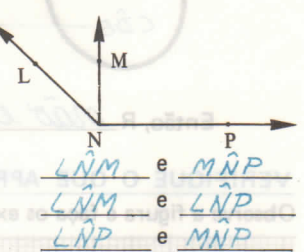
$A\hat{V}B$ e $A\hat{V}C$

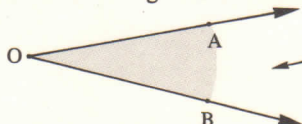
$A\hat{V}C$ e $B\hat{V}C$

3)

$L\hat{N}M$ e $M\hat{N}P$

$L\hat{N}M$ e $L\hat{N}P$

$L\hat{N}P$ e $M\hat{N}P$

UMA REGIÃO ESPECIAL: O INTERIOR DO ÂNGULO

Consideremos o ângulo $A\hat{O}B$:

Esta região determinada pelo ângulo recebe o nome de **região interna** ou **interior** do ângulo $A\hat{O}B$.

Indicação: I

Complete as sentenças com o símbolo ∈, ∉, ⊂ ou ⊄, de acordo com a figura:

1)

A ∈ l $\overline{AB}$ ⊂ l

B ∈ l $\overline{QP}$ ⊄ l

P ∉ l $\overline{AR}$ ⊄ l

2)

P ∈ l $\overline{PQ}$ ⊂ l

Q ∈ l $\overline{RM}$ ⊄ l

R ∉ l $\overline{LN}$ ⊄ l

3)

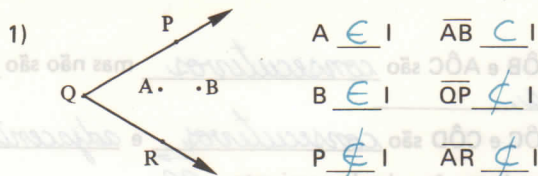
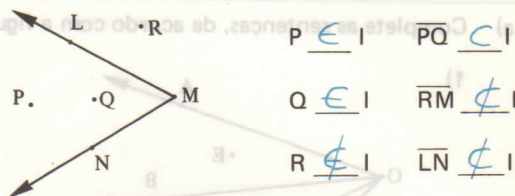
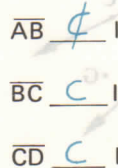
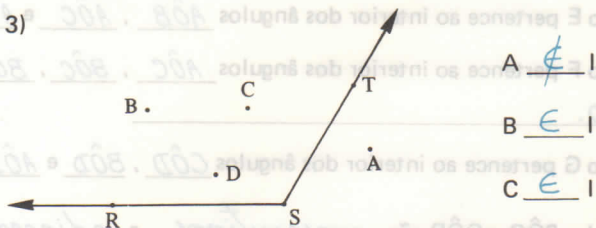
A ∉ l

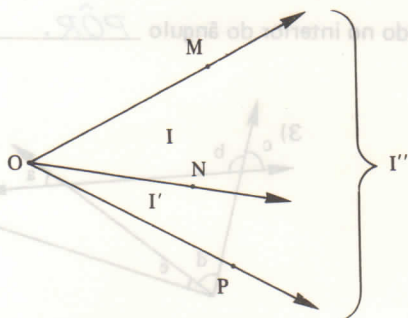
B ∈ l

C ∈ l

$\overline{AB}$ ∉ l

$\overline{BC}$ ⊂ l

$\overline{CD}$ ⊂ l

ÂNGULOS ADJACENTES

Observe:

Perceba que:

- Os interiores dos ângulos consecutivos MÔN e NÔP não têm ponto comum.

  $I \cap I' = \emptyset$

- Os interiores dos ângulos consecutivos MÔN e MÔP têm ponto comum.

  $I \cap I'' = I$

- Os interiores dos ângulos consecutivos MÔP e NÔP têm ponto comum.

  $I'' \cap I' = I'$

Os ângulos consecutivos, cujos interiores não têm ponto comum, recebem o nome de ângulos adjacentes.

Então:

- MÔN e NÔP são ângulos consecutivos e adjacentes;
- MÔN e MÔP são ângulos consecutivos e não-adjacentes;
- MÔP e NÔP são ângulos consecutivos e não-adjacentes.

VAMOS EXERCITAR

Indique, de acordo com a figura, os pares de ângulos adjacentes:

1)

PV̂Q e QV̂R

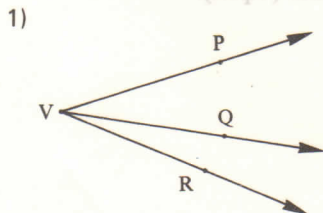
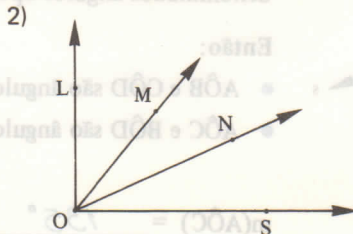
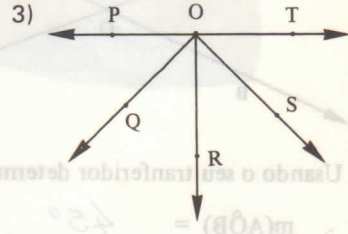
2)

L, M, N, O, S

LÔM e MÔN

MÔN e NÔS

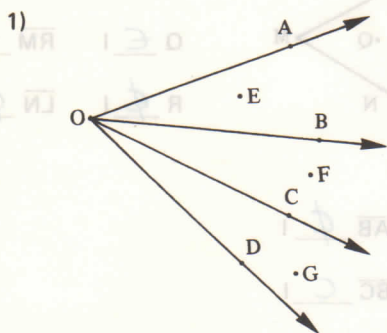
3)

P, O, T, Q, S, R

PÔQ e QÔR

QÔR e RÔS

RÔS e SÔT

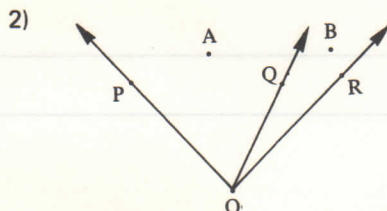
a) Complete as sentenças, de acordo com a figura:

1)

Os ângulos AÔB e AÔC são consecutivos mas não são adjacentes.

Os ângulos BÔC e CÔD são consecutivos e adjacentes

O lado comum destes ângulos é a semi-reta $\overrightarrow{OC}$.

- O ponto E pertence ao interior dos ângulos AÔB, AÔC e AÔD.
- O ponto F pertence ao interior dos ângulos AÔC, BÔC, BÔD e AÔD.
- O ponto G pertence ao interior dos ângulos CÔD, BÔD e AÔD.

2)

- Os ângulos PÔQ e QÔR são consecutivos e adjacentes, e o lado comum é a semi-reta $\overrightarrow{OQ}$.
- O ponto A não pertence ao interior do ângulo QÔR.
- O ponto B não pertence ao interior do ângulo PÔQ.
- O segmento $\overline{AB}$ está contido no interior do ângulo PÔR.

b) Dada a figura, indique os pares de ângulos adjacentes:

1)

a e b

a e d

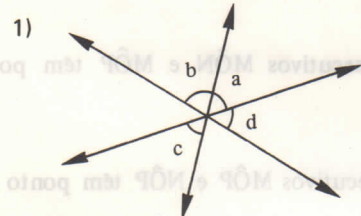
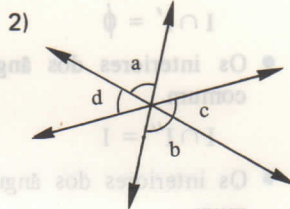
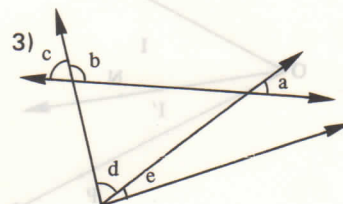
2)

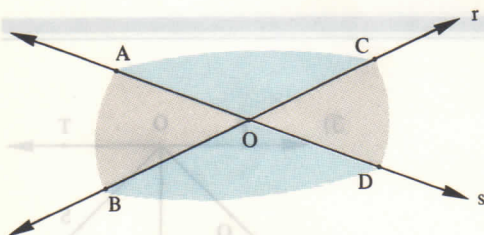
a e d

b e c

3)

b e c

d e e

ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

Considere a figura:

As retas r e s se interceptam no ponto O e são denominadas retas concorrentes.

Os ângulos AÔB e CÔD, AÔC e BÔD constituem pares de ângulos denominados ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.).

Então:

- AÔB e CÔD são ângulos o.p.v.
- AÔC e BÔD são ângulos o.p.v.

Usando o seu tranferidor determine:

m(AÔB) = 45° m(AÔC) = 135°

m(CÔD) = 45° m(BÔD) = 135°

Analise as medidas que você obteve e complete a frase:

Dois ângulos o.p.v. são congruentes, pois apresentam medidas iguais.

VAMOS EXERCITAR

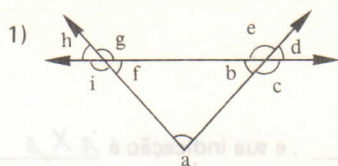
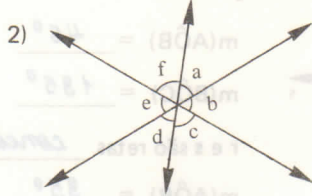
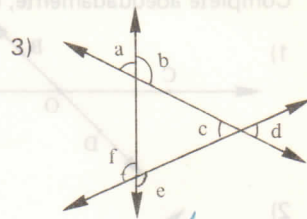
a) Indique, conforme a figura, os pares de ângulos o.p.v.:

1)

b e d
c e e
f e h
g e i

2)

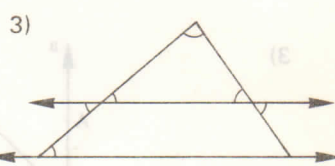
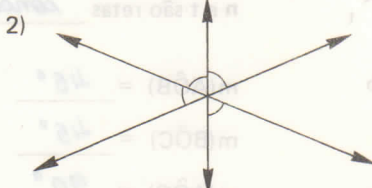
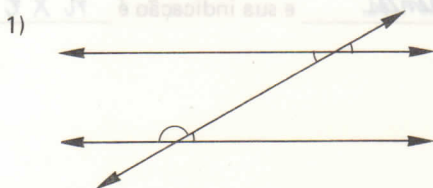
a e d
b e e
c e f

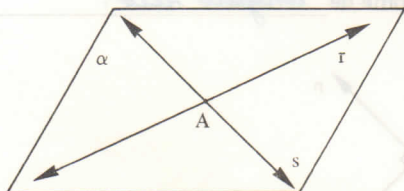
3)

c e d
e e f

b) Pinte de cores iguais os interiores dos pares de ângulos o.p.v. indicados nas figuras:

1)

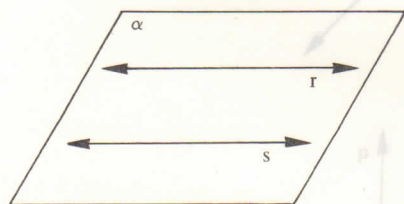
2)

3)

DUAS RETAS NO PLANO: AS POSIÇÕES RELATIVAS

Observe as retas **r** e **s** contidas no plano α:

Note que r e s se interceptam no ponto A.

$r \cap s = \{A\}$

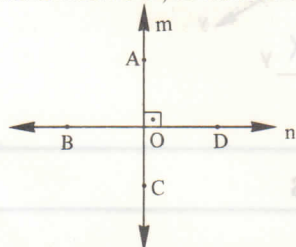
Duas retas que apresentam um único ponto comum recebem o nome de **retas concorrentes.**

Indicação: $r \times s$

Note que r e s não se interceptam.

$r \cap s = \emptyset$

Duas retas que não apresentam ponto comum recebem o nome de **retas paralelas.**

Indicação: $r \parallel s$

Usando o seu transferidor, descubra a medida dos ângulos determinados pelas retas concorrentes **m** e **n**:

m(AÔB) = 90°
m(BÔC) = 90°
m(CÔD) = 90°
m(AÔD) = 90°

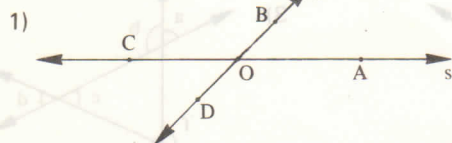
Logo, estes quatro ângulos são congruentes, pois possuem medidas iguais.

Duas retas nestas condições são denominadas **retas perpendiculares.**

Indicação: $m \perp n$

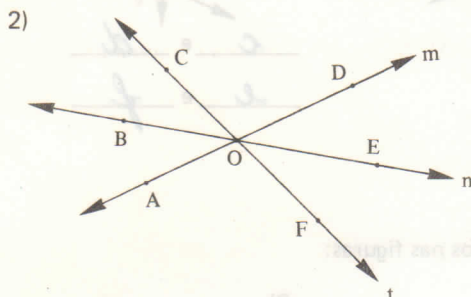
Duas retas são **perpendiculares** quando se interceptam, determinando quatro ângulos congruentes. Cada um desses ângulos recebe o nome de **ângulo reto.**

a) Complete adequadamente, de acordo com a figura:

1)

m(AÔB) = 45°

m(BÔC) = 135°

r e s são retas concorrentes, e sua indicação é r X s

2)

m(AÔB) = 35° m(DÔE) = 35°

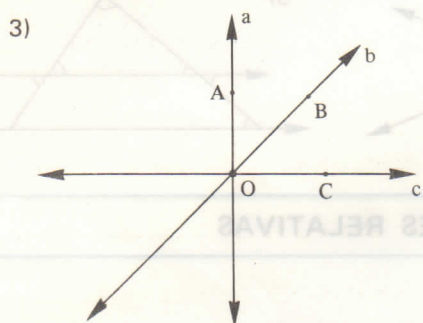
m(BÔC) = 35° m(EÔF) = 35°

m(CÔD) = 110° m(AÔF) = 110°

m e n são retas concorrentes e sua indicação é m X n.

m e t são retas concorrentes e sua indicação é m X t.

n e t são retas concorrentes e sua indicação é n X t.

3)

m(AÔB) = 45°

m(BÔC) = 45°

m(AÔC) = 90°

As retas **a** e **b** são concorrentes e sua indicação é a X b.

As retas **a** e **c** são perpendiculares e sua indicação é a ⊥ c.

O ângulo AÔC recebe o nome de ângulo reto.

b) Dê a indicação das retas de acordo com a figura:

1)

a X b

2)

m ⊥ n

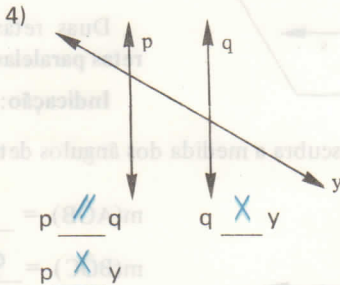
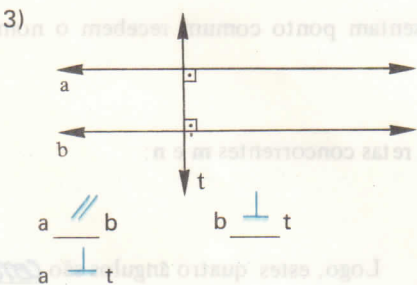
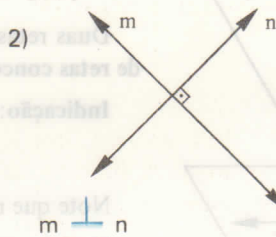
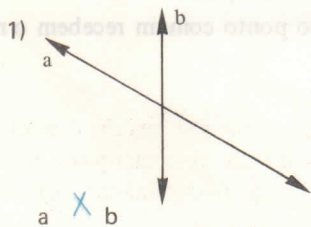
3)

a // b b ⊥ t

a ⊥ t

4)

p // q q X y

p X y

CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS

Você já sabe que duas retas são perpendiculares quando se interceptam determinando quatro ângulos congruentes, os quais recebem o nome de **ângulos retos**. A medida do ângulo reto é 90°.

Quando a medida de um ângulo for diferente de 90°, temos:

- **ângulo agudo**, se a medida for menor que 90°;
- **ângulo obtuso**, se a medida for maior que 90°.

VAMOS EXERCITAR

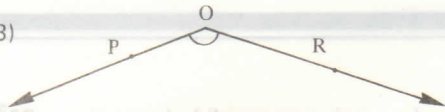
Com o auxílio de um transferidor, determine a medida dos ângulos e classifique-os em agudo, obtuso ou reto:

1)

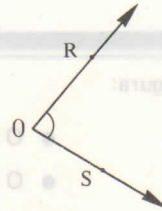
m(XÔY) = 60°. Logo, é um ângulo agudo.

2)

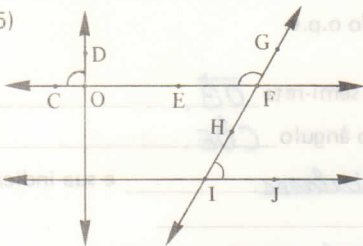
m(MÔN) = 90°. Logo, é um ângulo reto.

3)

m(PÔR) = 140°. Logo, é um ângulo obtuso.

4)

R
O
S

m(RÔS) = 80°. Logo, é um ângulo agudo.

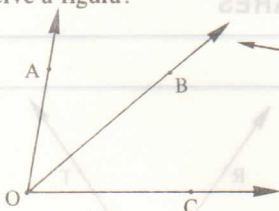
5)

D
G
C
O
E
F
H
I
J

m(EF̂G) = 120°. Logo, é um ângulo obtuso.

m(HÎJ) = 60°. Logo, é um ângulo agudo.

m(CÔD) = 90°. Logo, é um ângulo reto.

UMA SEMI-RETA ESPECIAL: A BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

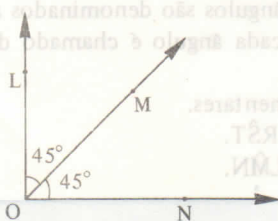
Observe a figura:

Esta semi-reta recebe o nome de **bissetriz** do ângulo AÔC.

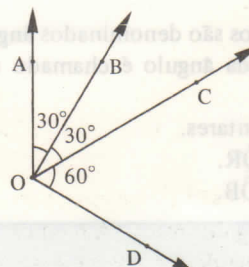
m(AÔC) = 80°
m(AÔB) = 40°
m(BÔC) = 40°

Então: bissetriz de um ângulo é a semi-reta com origem no vértice e que passa pelo interior desse ângulo, determinando dois ângulos adjacentes congruentes.

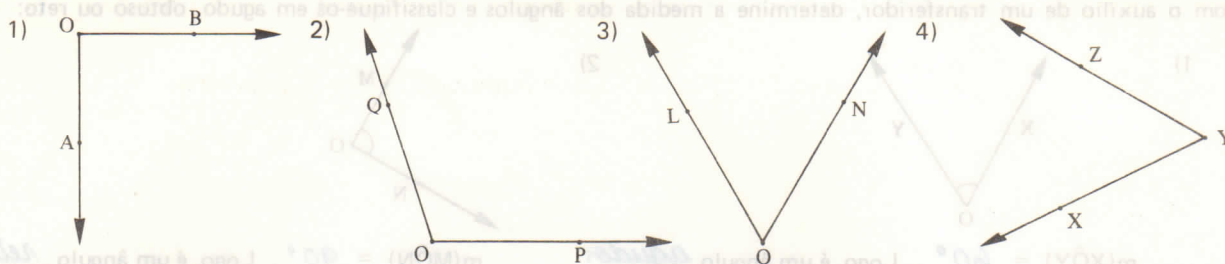
VAMOS EXERCITAR

a) Responda conforme a figura:

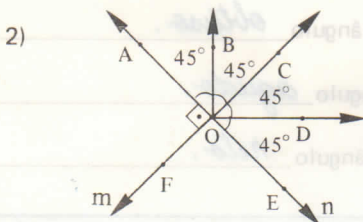
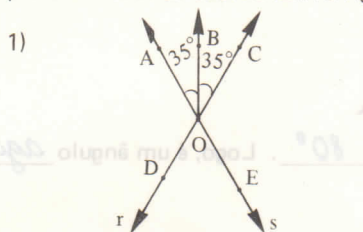
1)

$\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo LÔN.

2)

$\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz do ângulo AÔC.

A bissetriz do ângulo AÔD é $\overrightarrow{OC}$.

b) Com o auxílio de seu transferidor, trace a bissetriz dos ângulos:

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

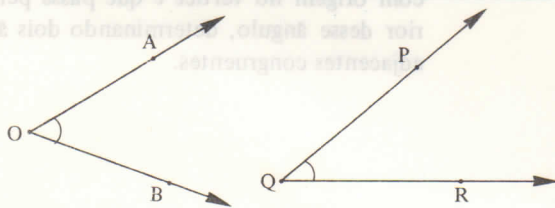
Complete as frases de acordo com a figura:

1)

- O ângulo AÔB é *agudo*, pois a sua medida é menor que 90°.
- O ângulo BÔC é *agudo*, pois a sua medida é menor que 90°.
- A semi-reta $\overrightarrow{OB}$ é a *bissetriz* do ângulo AÔC.
- As retas **r** e **s** são *concorrentes* e sua indicação é *r X s.*
- Os ângulos *AÔC* e *DÔE* são o.p.v.

2)

- A bissetriz do ângulo AÔC é a semi-reta *$\overrightarrow{OB}$*.
- A semi-reta $\overrightarrow{OD}$ é a bissetriz do ângulo *CÔE*.
- As retas **m** e **n** são *perpendiculares* e sua indicação é *$m \perp n$.*
- A medida do ângulo AÔF é *90°*, pois é um ângulo reto.
- Os ângulos AÔC e *EÔF*, CÔE e *AÔF* são o.p.v.

ÂNGULOS COMPLEMENTARES E SUPLEMENTARES

Considere os seguintes ângulos:

m(AÔB) = 50° m(PQ̂R) = 40°

Note que a soma das medidas dos ângulos AÔB e PQ̂R é igual a 90°.

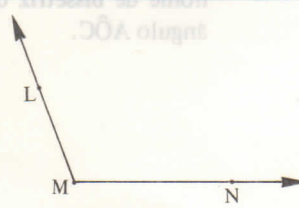
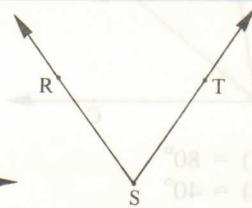
Pois bem, estes dois ângulos são denominados **ângulos complementares**, e cada ângulo é chamado de **complemento** do outro.

AÔB e PQ̂R são complementares.

AÔB é complemento de PQ̂R.

PQ̂R é complemento de AÔB.

Então:

Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90°.

m(LM̂N) = 110° m(RŜT) = 70°

Note que a soma das medidas dos ângulos LM̂N e RŜT é igual a 180°.

Pois bem, estes dois ângulos são denominados **ângulos suplementares**, e cada ângulo é chamado de **suplemento** do outro.

LM̂N e RŜT são suplementares.

LM̂N é suplemento de RŜT.

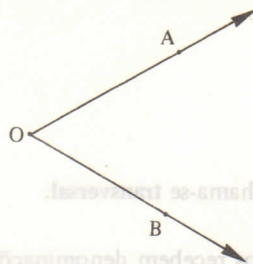
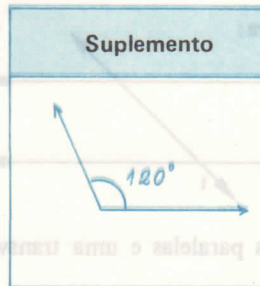
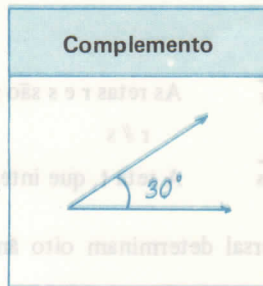
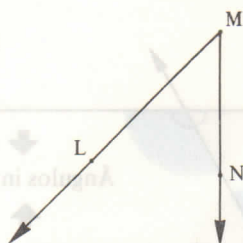
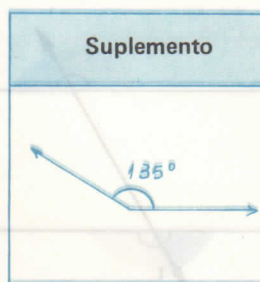
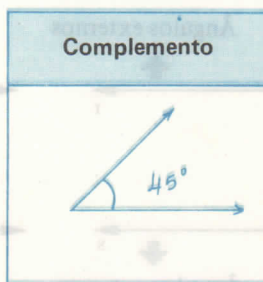
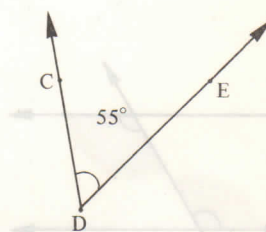
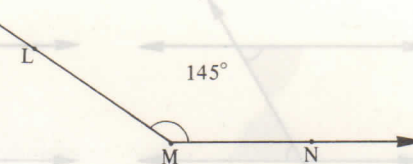
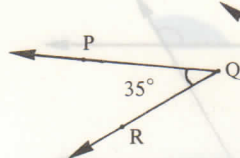
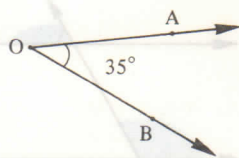
RŜT é suplemento de LM̂N.

Então:

Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180°.

VAMOS EXERCITAR

a) Com o auxílio da régua e do transferidor, construa nos quadros o complemento e o suplemento do ângulo dado:

1)

m(AÔB) = 60°

2)

m(LM̂N) = 45°

b) Complete as frases de acordo com as figuras:

- Os ângulos AÔB e PQ̂R são congruentes.
- Os ângulos AÔB e CD̂E ou PQ̂R e CD̂E são complementares.
- Os ângulos AÔB e LM̂N ou PQ̂R e LM̂N são suplementares.
- O ângulo AÔB é complemento do ângulo CD̂E.
- O ângulo PQ̂R é suplemento do ângulo LM̂N.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete as sentenças:

1) Se um ângulo medir 20°, o seu complemento medirá 70° , e o seu suplemento, 160°.

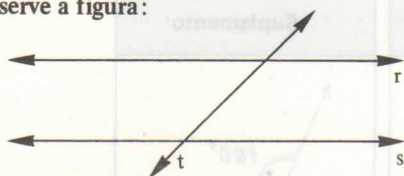
2) Se o complemento de um ângulo medir 72°, então a medida desse ângulo será 18°.

3) Se o suplemento de um ângulo medir 105°, então a medida desse ângulo será 75°.

b) Complete a tabela:

Medida de um ângulo	28°	42°	75°	10°	80°	12°	37°
Medida do complemento desse ângulo	62°	48°	15°	80°	10°	78°	53°
Medida do suplemento desse ângulo	152°	138°	105°	170°	100°	168°	143°

ÂNGULOS DETERMINADOS POR DUAS PARALELAS E UMA TRANSVERSAL

Observe a figura:

As retas r e s são paralelas.

r // s

A reta t, que intercepta as paralelas, chama-se transversal.

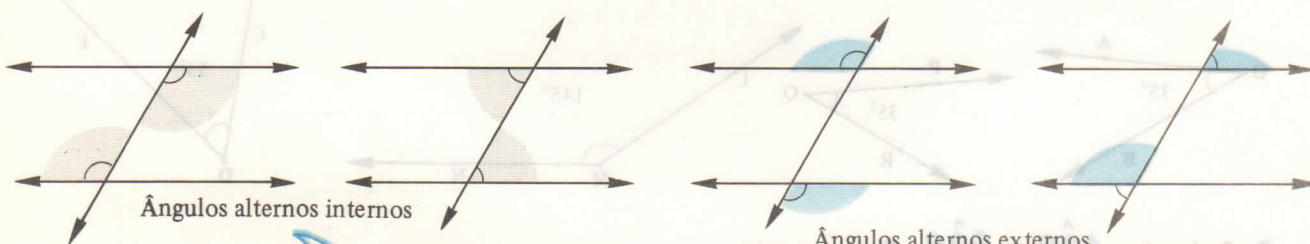
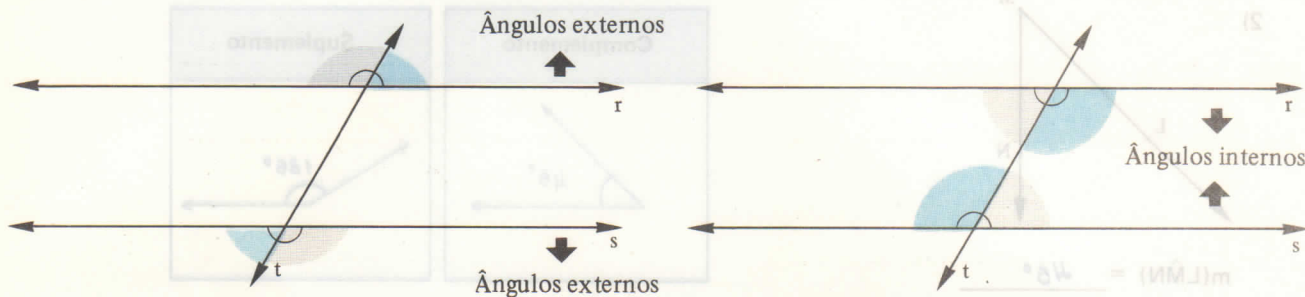
Duas retas paralelas e uma transversal determinam oito ângulos. Estes ângulos recebem denominações especiais. Veja:

Ângulos externos

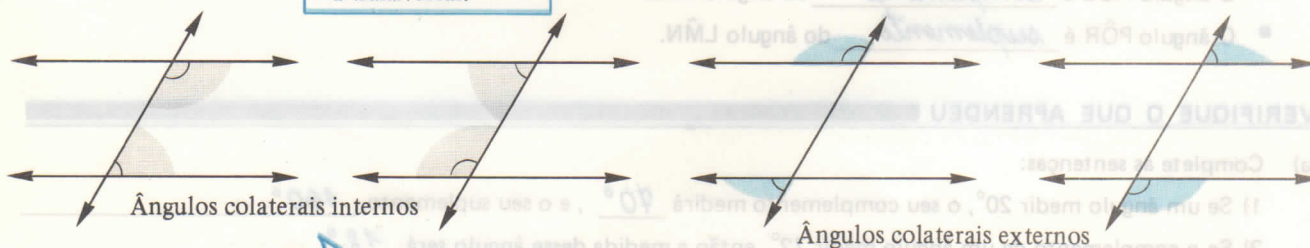
Ângulos externos

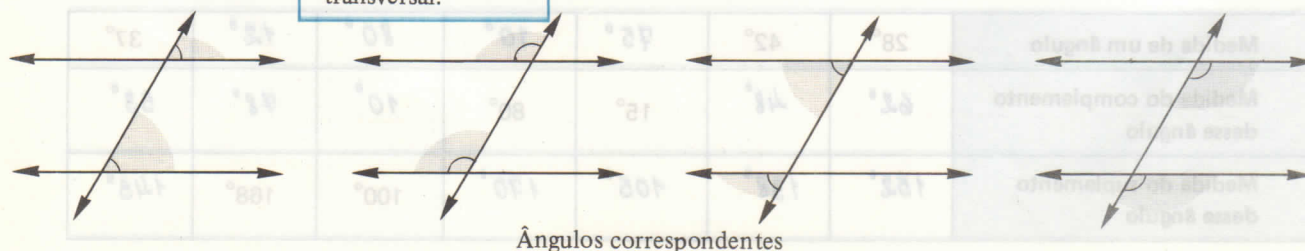
Ângulos internos

Ângulos alternos internos

Ângulos alternos externos

Os interiores se situam em lados opostos em relação à transversal.

Ângulos colaterais internos

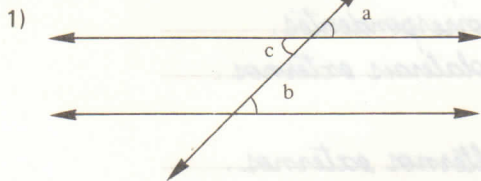
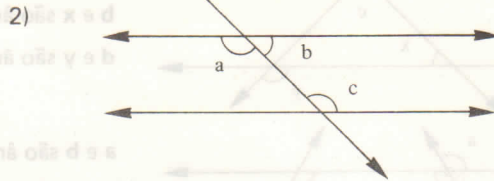
Ângulos colaterais externos

Os interiores se situam do mesmo lado em relação à transversal.

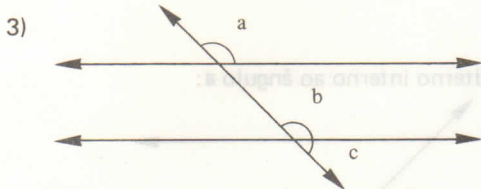
Ângulos correspondentes

VAMOS EXERCITAR

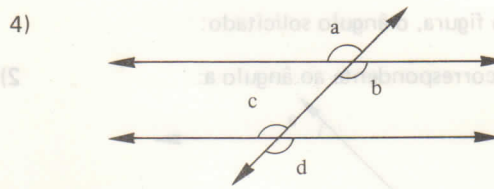
Dê a denominação dos ângulos indicados nas figuras:

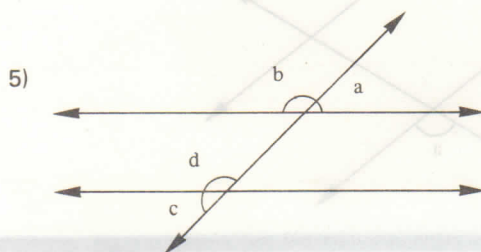
1)

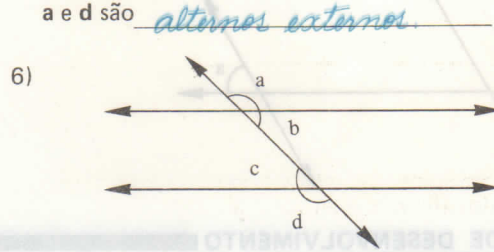
a e b são *correspondentes.*
b e c são *alternos internos.*

2)

a e c são *alternos internos.*
b e c são *colaterais internos.*

3)

a e b são *correspondentes.*
a e c são *colaterais externos.*

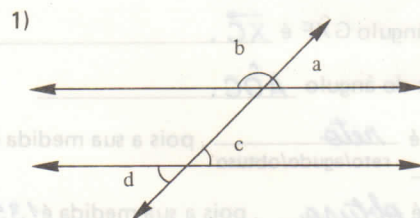
4)

a e c são *correspondentes.*
b e d são *correspondentes.*
b e c são *alternos internos.*
a e d são *alternos externos.*

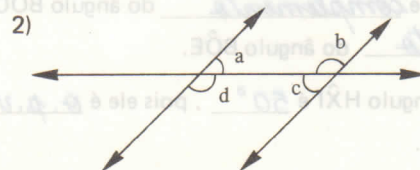
5)

a e c são *alternos externos.*
b e c são *colaterais externos.*
b e d são *correspondentes.*

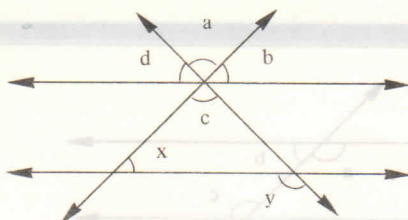
6)

b e c são *alternos internos.*
a e d são *alternos externos.*

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Dê a denominação dos ângulos de acordo com a figura:

1)

a e b são ângulos *adjacentes.*
a e c são ângulos *correspondentes.*
a e d são ângulos *alternos externos.*
c e d são ângulos *o. p. v.*
b e d são ângulos *colaterais externos.*

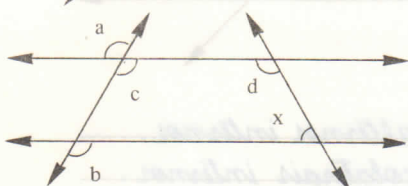
2)

a e b são ângulos *colaterais internos.*
a e c são ângulos *alternos internos.*
a e d são ângulos *adjacentes.*
b e c são ângulos *adjacentes.*
c e d são ângulos *colaterais internos.*

3)

a e **b** são ângulos adjacentes.

a e **c** são ângulos o.p.v.

b e **x** são ângulos correspondentes.

d e y são ângulos colaterais externos.

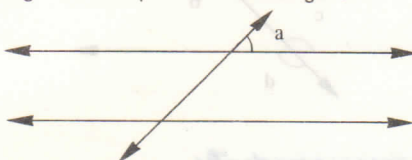
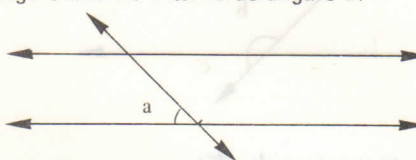
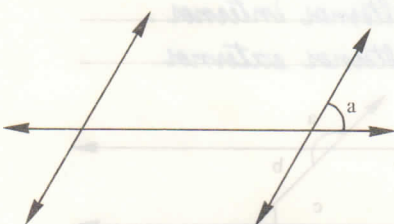
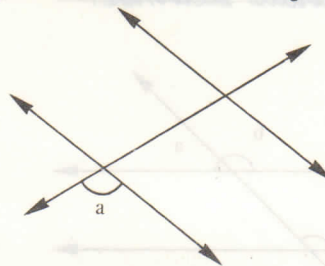
4)

a e **b** são ângulos alternos externos.

a e **c** são ângulos o.p.v.

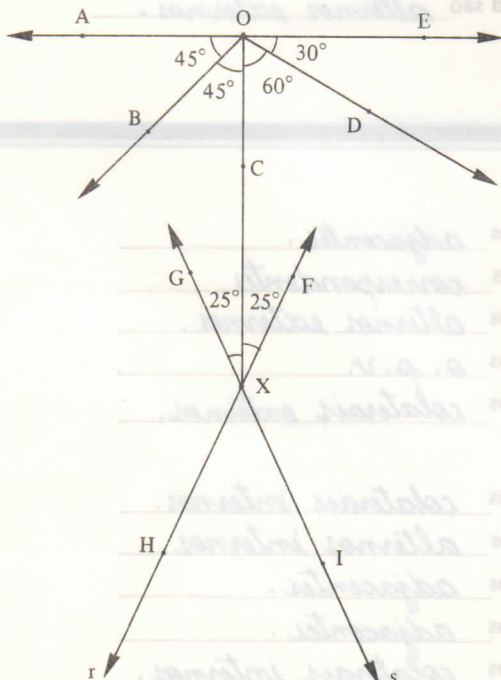
b e **c** são ângulos correspondentes.

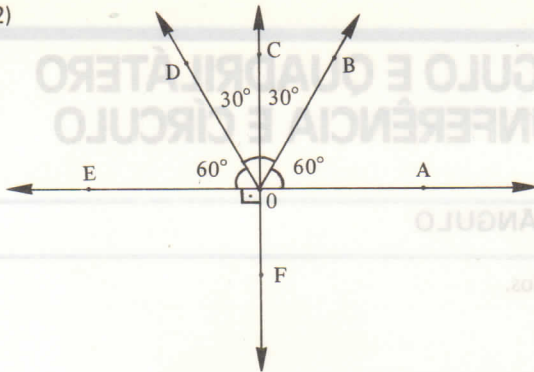
d e **x** são ângulos colaterais internos.

b) Indique, na figura, o ângulo solicitado:

1) Ângulo correspondente ao ângulo **a**:

2) Ângulo alterno interno ao ângulo **a**:

3) Ângulo alterno externo ao ângulo **a**:

4) Ângulo colateral externo ao ângulo **a**:

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Complete as frases de acordo com a figura:

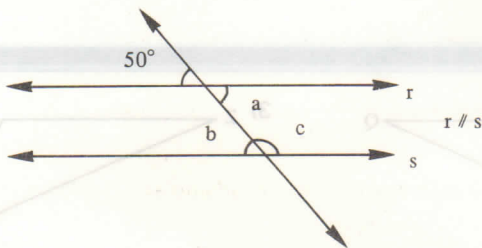
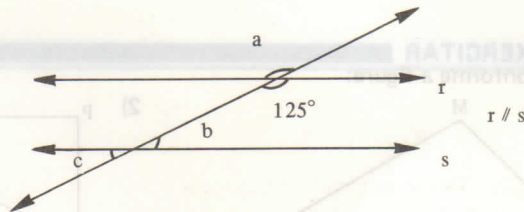
1)

- Os ângulos AÔB e BÔC são complementares. (complementares/suplementares)
- Os ângulos CÔD e DÔE são complementares. (complementares/suplementares)
- Os ângulos BÔC e CÔD são adjacentes. (congruentes/adjacentes)
- Os ângulos G$\hat{X}$F e H$\hat{X}$I são o.p.v.
- A bissetriz do ângulo G$\hat{X}$F é $\overrightarrow{XC}$.
- $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz do ângulo AÔC.
- O ângulo AÔC é reto (reto/agudo/obtuso), pois a sua medida é 90°
- O ângulo BÔE é obtuso, pois a sua medida é 135°.
- O ângulo AÔB é complemento do ângulo BÔC e suplemento do ângulo BÔE.
- A medida do ângulo H$\hat{X}$I é 50°, pois ele é o.p.v. ao ângulo G$\hat{X}$F.
- As retas **r** e **s** são concorrentes.

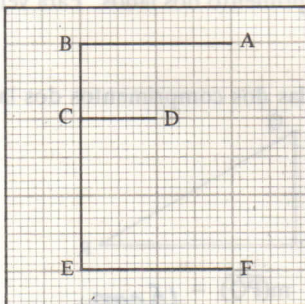
2)

- Os ângulos agudos são AÔB , BÔC , CÔD , DÔE e BÔD.
- Os ângulos AÔB e BÔC são adjacentes e complementares.
- Os ângulos AÔB e BÔE são adjacentes e suplementares.
- A bissetriz do ângulo BÔD é a semi-reta $\overrightarrow{OC}$.
- As retas $\overleftrightarrow{CF}$ e $\overleftrightarrow{AE}$ são perpendiculares.
- A semi-reta $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz do ângulo AÔD.

b) Dê a medida dos ângulos indicados por letras nas figuras abaixo:

1)

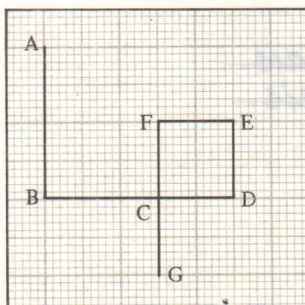
a = 50°
b = 50°
c = 130°

2)

a = 125°
b = 55°
c = 55°

c) Verifique, de acordo com a figura, se é ou não de equivalência a relação R de A em A definida como **o segmento** x **é congruente ao segmento** y:

1) A = {$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CE}$}

2) A = {$\overline{AB}$, $\overline{CE}$, $\overline{EF}$}

3) A = {$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$}

d) Faça um diagrama de setas e um diagrama de linha para a relação R de A em A definida como **o segmento** x **é congruente ao segmento** y, e a seguir responda às perguntas abaixo:

A = {$\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{FG}$}

1) A relação R é reflexiva? (Sim.)

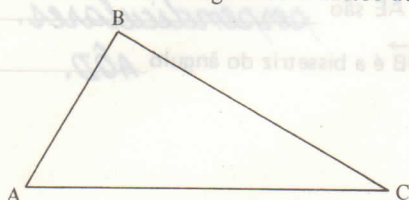
2) A relação R é simétrica? (Sim.)

3) A relação R é transitiva? (Não.)

TRIÂNGULO E QUADRILÁTERO CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

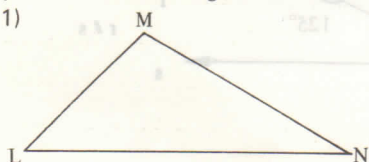
NOÇÃO DE TRIÂNGULO

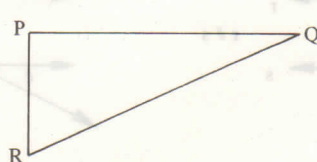
Dá-se o nome de triângulo ou trilátero ao polígono de três lados.

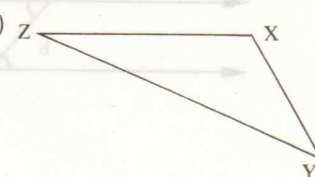
Veja:

Pontos A, B e C: vértices do triângulo.
Segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$: lados do triângulo.
Indicação: $\triangle ABC$

VAMOS EXERCITAR

Complete conforme a figura:

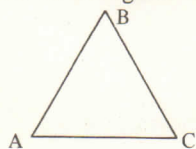
1)

Vértices: L, M e N
Lados: $\overline{LM}$, $\overline{MN}$ e $\overline{LN}$
Indicação: $\triangle LMN$

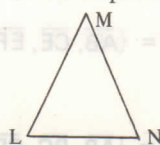
2)

Vértices: P, Q e R
Lados: $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ e $\overline{PR}$
Indicação: $\triangle PQR$

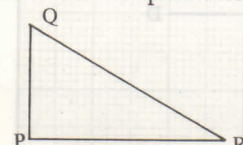
3)

Vértices: X, Y e Z
Lados: $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ e $\overline{XZ}$
Indicação: $\triangle XYZ$

TRIÂNGULO: UMA CLASSIFICAÇÃO

Para a classificação dos triângulos, adota-se como um dos critérios a medida do comprimento dos lados. Para vermos isso, vamos fazer os seguintes exercícios:

Dados os triângulos abaixo, use a sua régua ou o seu esquadro e determine as medidas dos comprimentos dos lados:

m($\overline{AB}$) = 1,9 cm
m($\overline{BC}$) = 1,9 cm
m($\overline{AC}$) = 1,9 cm

M, L, N

m($\overline{LM}$) = 1,8 cm
m($\overline{MN}$) = 1,8 cm
m($\overline{LN}$) = 1,5 cm

Q, P, R

m($\overline{PQ}$) = 1,5 cm
m($\overline{QR}$) = 3 cm
m($\overline{PR}$) = 2,6 cm

Agora complete as frases:

O $\triangle ABC$ apresenta os três lados congruentes, ou seja, com medidas iguais.
O $\triangle LMN$ apresenta dois lados congruentes, ou seja, com medidas iguais.
O $\triangle PQR$ apresenta os três lados com medidas diferentes.

Conforme as medidas dos lados, os triângulos classificam-se em:

- **Triângulo eqüilátero**: os três lados têm medidas iguais.
- **Triângulo isósceles**: somente dois lados têm medidas iguais.
- **Triângulo escaleno**: os três lados têm medidas diferentes.

VAMOS EXERCITAR

a) Classifique os triângulos de acordo com as medidas dos lados:

1)

isósceles

2)

escaleno

3)

eqüilátero

4)

isósceles

5) 6, 6, 10

isósceles

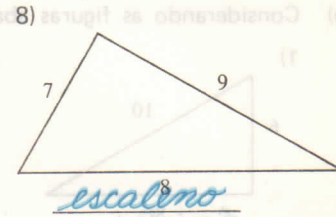
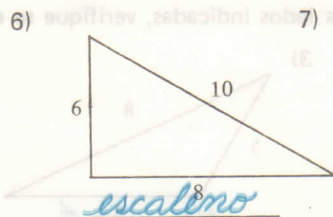
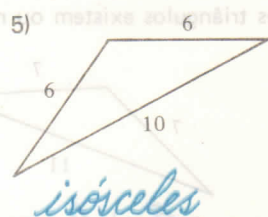
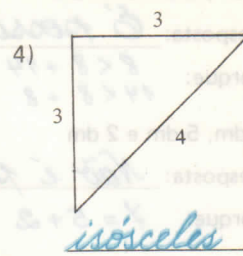
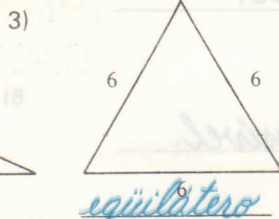
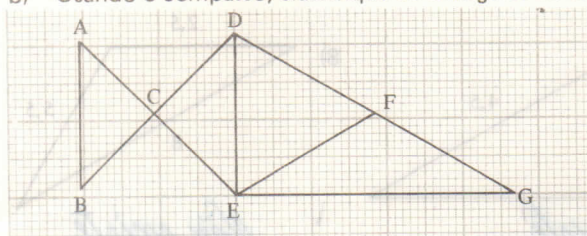
6) 6, 10, 8

escaleno

7) 4, 4, 4

eqüilátero

8)

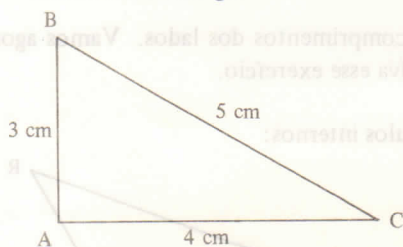
escaleno

b) Usando o compasso, classifique os triângulos de acordo com as medidas dos lados:

ΔABC: isósceles

ΔCDE: isósceles

ΔDEF: eqüilátero

ΔEFG: isósceles

UMA PROPRIEDADE IMPORTANTE DOS TRIÂNGULOS

Considere o triângulo:

Perceba que:

3 cm < 4 cm + 5 cm

4 cm < 3 cm + 5 cm

5 cm < 3 cm + 4 cm

Em qualquer triângulo ocorre o seguinte:

> A medida do comprimento de qualquer lado é sempre menor que a soma das medidas dos comprimentos dos outros dois.

Deste modo, torna-se impossível construir um triângulo cujos lados tenham as seguintes medidas: 4 cm, 5 cm e 10 cm. Isto porque:

4 cm < 5 cm + 10 cm

5 cm < 4 cm + 10 cm

10 cm > 4 cm + 5 cm

VAMOS EXERCITAR

a) Verifique se é possível ou não construir triângulos cujos lados tenham as seguintes medidas:

1) 4 cm, 6 cm e 5 cm

Resposta: É possível.

Porque: 4 < 6 + 5
6 < 4 + 5
5 < 4 + 6

2) 7 cm, 8 cm e 12 cm

Resposta: É possível.

Porque: 7 < 8 + 12
8 < 7 + 12
12 < 7 + 8

3) 8 dm, 8 dm e 14 dm

Resposta: É possível.

Porque: $8 < 8 + 14$; $14 < 8 + 8$

4) 2 cm, 5 cm e 2 cm

Resposta: Não é possível.

Porque: $2 < 5 + 2$; $5 > 2 + 2$

5) 7 dm, 5 dm e 2 dm

Resposta: Não é possível.

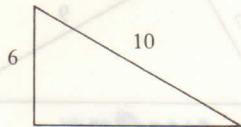
Porque: $7 = 5 + 2$

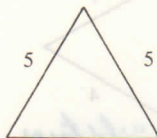
6) 11 m, 13 m e 8 m

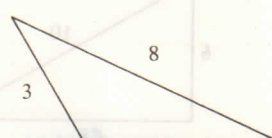
Resposta: É possível.

Porque: $11 < 13 + 8$, $13 < 11 + 8$, $8 < 11 + 13$

b) Considerando as figuras abaixo com as medidas dos lados indicadas, verifique se estes triângulos existem ou não:

1)

Existe.

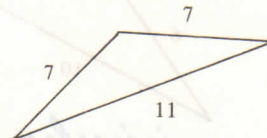
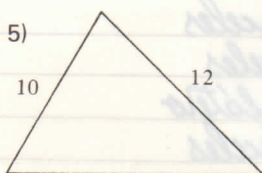
2)

Existe.

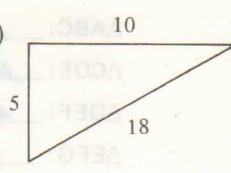
3)

Não existe.

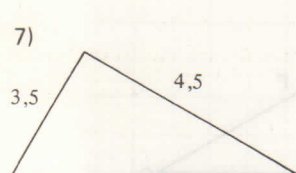
4)

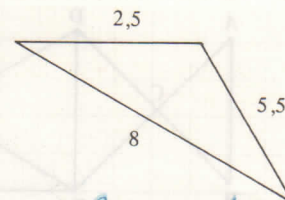
Existe.

5)

10 12 23

Não existe.

6)

Não existe.

7)

Existe.

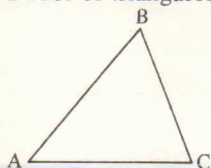
8)

Não existe.

TRIÂNGULOS: OUTRA CLASSIFICAÇÃO

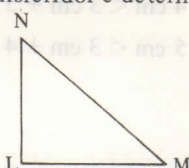
Você aprendeu a classificar os triângulos de acordo com as medidas dos comprimentos dos lados. Vamos agora adotar um outro critério, ou seja, as medidas dos ângulos internos. Para isso, resolva esse exercício.

Dados os triângulos abaixo, use o seu transferidor e determine as medidas dos ângulos internos:

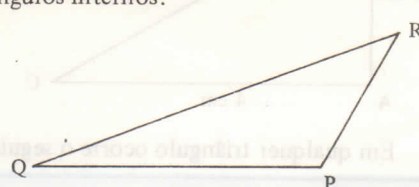
N L M

R Q P

m(Â) = 50°

m(B̂) = 60°

m(Ĉ) = 70°

m(L̂) = 90°

m(M̂) = 40°

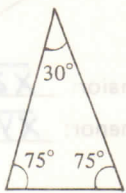
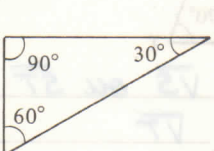
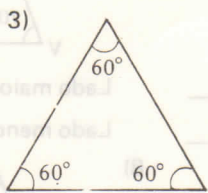
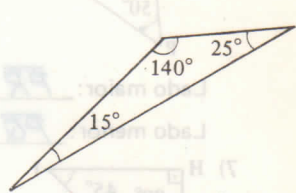
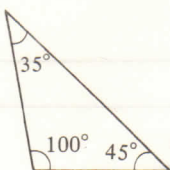
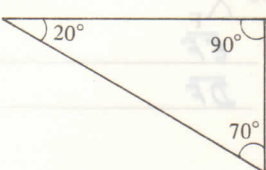
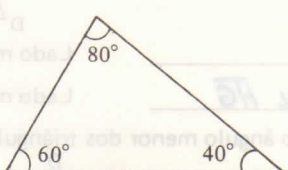
m(N̂) = 50°

m(P̂) = 120°

m(Q̂) = 20°

m(R̂) = 40°

Agora complete:

O △ABC apresenta os três ângulos agudos, ou seja, com medidas menores que 90°.

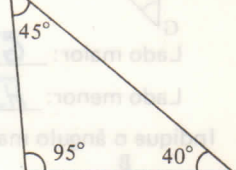
O △LMN apresenta um ângulo reto, ou seja, com medida igual a 90°.

O △PQR apresenta um ângulo obtuso, ou seja, com medida maior que 90°.

De acordo com as medidas dos ângulos internos, os triângulos podem ser:

- **Triângulo acutângulo**: os três ângulos são agudos.
- **Triângulo retângulo**: somente um ângulo é reto.
- **Triângulo obtusângulo**: somente um ângulo é obtuso.

VAMOS EXERCITAR

a) Classifique os triângulos conforme as medidas dos ângulos:

1) 30°, 75°, 75° — acutângulo

2) 90°, 30°, 60° — retângulo

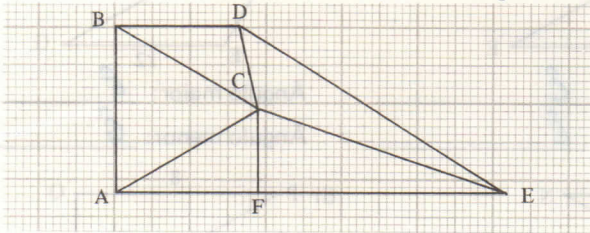
3) 60°, 60°, 60° — acutângulo

4) 25°, 140°, 15° — obtusângulo

5) 35°, 100°, 45° — obtusângulo

6) 20°, 90°, 70° — retângulo

7) 80°, 60°, 40° — acutângulo

8) 45°, 95°, 40° — obtusângulo

b) Usando o transferidor, classifique os triângulos de acordo com os ângulos:

ΔABC: acutângulo

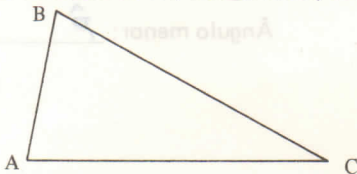
ΔBCD: obtusângulo

ΔCDE: obtusângulo

ΔCEF: retângulo

ΔACF: retângulo

TRIÂNGULOS: OUTRA PROPRIEDADE

Com auxílio de seu transferidor, determine as medidas dos ângulos do triângulo ABC:

$m(\hat{A})$ = 80°

$m(\hat{B})$ = 70°

$m(\hat{C})$ = 30°

Usando um compasso, verifique qual é o lado maior e qual é o lado menor do triângulo do exercício anterior:

lado maior: $\overline{BC}$

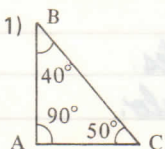
lado menor: $\overline{AB}$

Com base nesses exercícios, você pode verificar que:

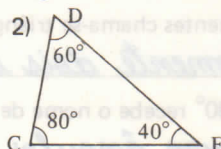
Num triângulo, ao lado maior opõe-se o ângulo maior, e ao lado menor opõe-se o ângulo menor.

VAMOS EXERCITAR

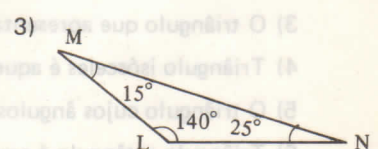
a) Indique o lado maior e o lado menor dos triângulos:

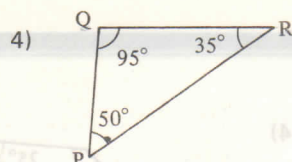
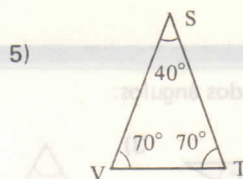
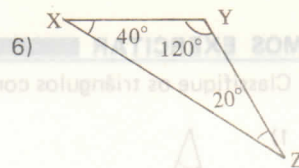
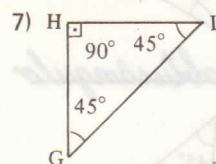
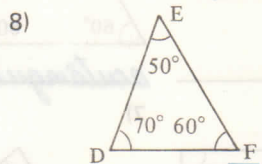
1)

Lado maior: $\overline{BC}$

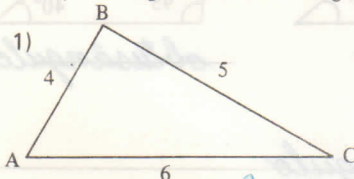
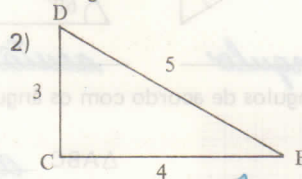
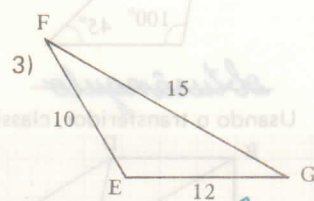
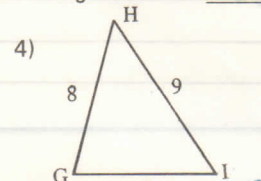
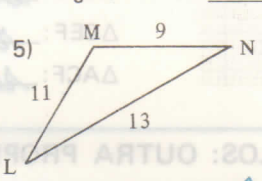
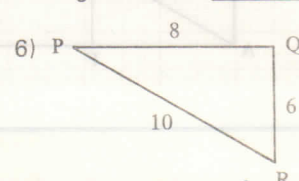
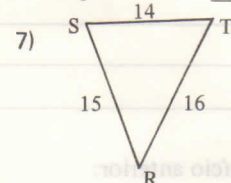
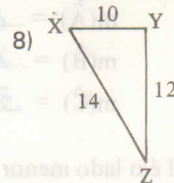
Lado menor: $\overline{AC}$

2) D 60°, C 80°, E 40°

Lado maior: $\overline{DE}$

Lado menor: $\overline{CD}$

3) M 15°, L 140°, N 25°

Lado maior: $\overline{MN}$

Lado menor: $\overline{LN}$

4) Lado maior: $\overline{PR}$
Lado menor: $\overline{PQ}$

5) Lado maior: $\overline{VS}$ ou $\overline{ST}$
Lado menor: $\overline{VT}$

6) Lado maior: $\overline{XZ}$
Lado menor: $\overline{XY}$

7) Lado maior: $\overline{GI}$
Lado menor: $\overline{HI}$ ou $\overline{HG}$

8) Lado maior: $\overline{EF}$
Lado menor: $\overline{DF}$

b) Indique o ângulo maior e o ângulo menor dos triângulos:

1) Ângulo maior: $\hat{B}$
Ângulo menor: $\hat{C}$

2) Ângulo maior: $\hat{C}$
Ângulo menor: $\hat{E}$

3) Ângulo maior: $\hat{E}$
Ângulo menor: $\hat{G}$

4) Ângulo maior: $\hat{G}$
Ângulo menor: $\hat{H}$

5) Ângulo maior: $\hat{M}$
Ângulo menor: $\hat{L}$

6) Ângulo maior: $\hat{Q}$
Ângulo menor: $\hat{P}$

7) Ângulo maior: $\hat{S}$
Ângulo menor: $\hat{R}$

8) Ângulo maior: $\hat{Y}$
Ângulo menor: $\hat{Z}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete as frases adequadamente:

1) Triângulo é o polígono que apresenta *três* lados e *três* ângulos internos.

2) O triângulo que apresenta os três lados com medidas desiguais chama-se triângulo *escaleno*.

3) O triângulo que apresenta os três lados congruentes chama-se triângulo *eqüilátero*.

4) Triângulo isósceles é aquele que apresenta *somente dois lados congruentes*.

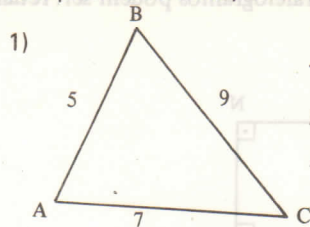
5) O triângulo cujos ângulos medem 35°, 65° e 80° recebe o nome de triângulo *acutângulo*.

6) Triângulo retângulo é aquele que apresenta *um ângulo reto*.

7) Num triângulo qualquer, ao maior lado opõe-se o *maior* ângulo.

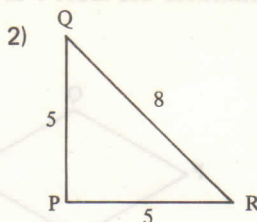
8) Num triângulo qualquer, ao menor ângulo opõe-se o *menor* lado.

b) Complete as informações de acordo com os triângulos representados:

1)

Triângulo escaleno

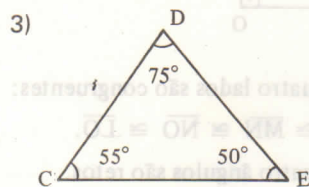
Ângulo maior: $\hat{A}$

Ângulo menor: $\hat{C}$

2)

Triângulo isósceles

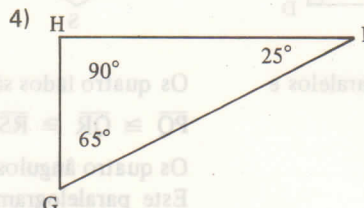
Ângulo maior: $\hat{P}$

Ângulo menor: $\hat{R}$ ou $\hat{Q}$

3)

Triângulo acutângulo

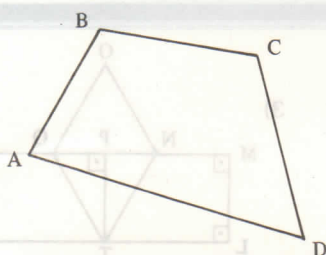
Lado maior: $\overline{CE}$

Lado menor: $\overline{CD}$

4)

Triângulo retângulo

Lado maior: $\overline{GI}$

Lado menor: $\overline{GH}$

NOÇÃO DE QUADRILÁTERO

Dá-se o nome de quadrilátero ao polígono de quatro lados.

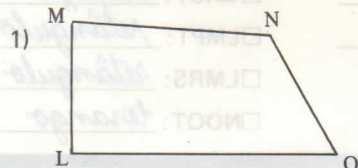
Pontos A, B, C e D: vértices do quadrilátero.

Segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$: lados do quadrilátero.

Indicação: □ABCD

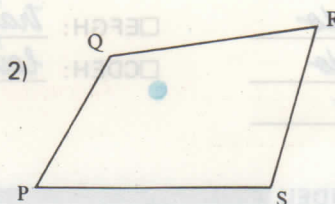
VAMOS EXERCITAR

Complete conforme a figura:

1)

Vértices: L, M, N e O

Lados: $\overline{LM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NO}$ e $\overline{OL}$

Indicação: □ LMNO

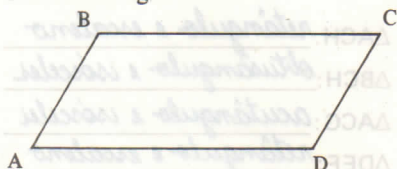
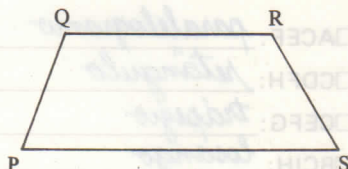
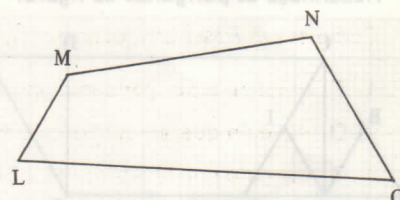
2)

Vértices: P, Q, R e S

Lados: $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{PS}$

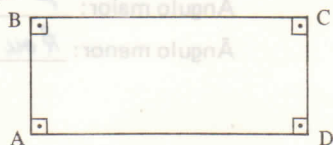
Indicação: □ PQRS

QUADRILÁTEROS: UMA CLASSIFICAÇÃO

Os quadriláteros classificam-se em paralelogramo, trapézio e trapezóide.

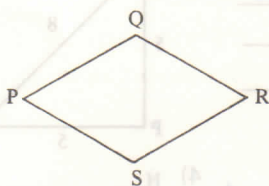
Observe as figuras:

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$: lados opostos.
$\overline{BC}$ e $\overline{AD}$: lados opostos.
$\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$ e $\overline{BC} /\!/ \overline{AD}$.
Este quadrilátero recebe o nome de **paralelogramo**.

$\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$: lados opostos.
$\overline{QR}$ e $\overline{PS}$: lados opostos.
Somente $\overline{QR} /\!/ \overline{PS}$.
Este quadrilátero recebe o nome de **trapézio**.

$\overline{LM}$ e $\overline{NO}$: lados opostos.
$\overline{MN}$ e $\overline{LO}$: lados opostos.
Não há lados paralelos.
Este quadrilátero recebe o nome de **trapezóide**.

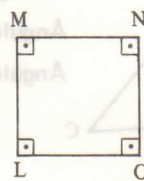
Conforme as medidas dos comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos, os paralelogramos podem ser: **retângulo, losango** ou **quadrado**.

Veja:

Os lados opostos são paralelos e congruentes:

$\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

$\overline{BC} /\!/ \overline{AD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.

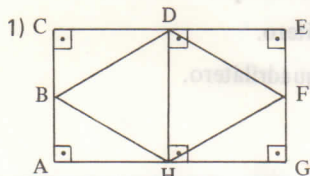
Os quatro ângulos são retos.
Este paralelogramo recebe o nome de **retângulo**.

Os quatro lados são congruentes:
$\overline{PQ} \cong \overline{QR} \cong \overline{RS} \cong \overline{PS}$.

Os quatro ângulos não são retos.
Este paralelogramo recebe o nome de **losango**.

Os quatro lados são congruentes:
$\overline{LM} \cong \overline{MN} \cong \overline{NO} \cong \overline{LO}$.

Os quatro ângulos são retos.
Este paralelogramo recebe o nome de **quadrado**.

VAMOS EXERCITAR

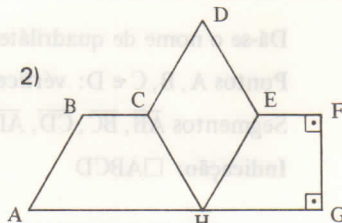
Identifique os quadriláteros:

1)

□ACEG: retângulo

□ACDH: quadrado

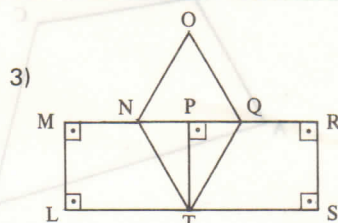
□DEGH: quadrado

□BDFH: losango

2)

□ABCH: trapézio

□EFGH: trapézio

□CDEH: losango

3)

□LMNT: trapézio

□QRST: trapézio

□LMPT: retângulo

□LMRS: retângulo

□NOQT: losango

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

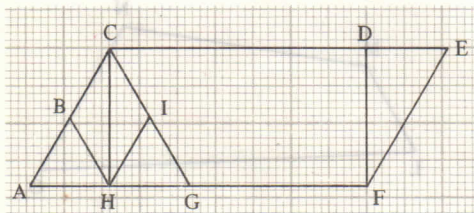
a) Complete as sentenças:

1) O quadrilátero apresenta quatro lados.

2) O quadrilátero que apresenta somente dois lados paralelos chama-se trapézio.

3) O paralelogramo que apresenta os quatro lados congruentes e os ângulos retos chama-se quadrado.

4) O paralelogramo que apresenta os quatro lados congruentes e os ângulos não-retos chama-se losango.

b) Reconheça os polígonos da figura:

□ACEF: paralelogramo

□CDFH: retângulo

□CEFG: trápezio

□BCIH: losango

△ACH: retângulo e escaleno

△BCH: obtusângulo e isósceles

△ACG: acutângulo e isósceles

△DEF: retângulo e escaleno

NOÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIA

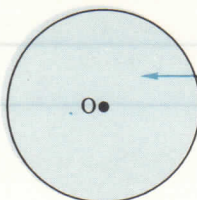
Usando um compasso com qualquer abertura, você traça uma linha curva e fechada que recebe o nome de circunferência.

Circunferência: denominação dada ao conjunto de pontos de um plano eqüidistantes de um mesmo ponto desse plano.

Observe:

Esta linha é uma circunferência.
O ponto **O** recebe o nome de **centro**.

DUAS REGIÕES ESPECIAIS: O INTERIOR DA CIRCUNFERÊNCIA E O CÍRCULO

Veja:

Esta região determinada pela circunferência recebe o nome de **região interna** ou **interior** da circunferência.

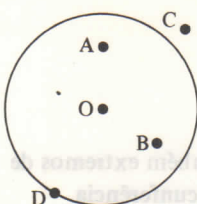
Indicação: I

A região determinada pela união da circunferência com o seu interior recebe o nome de **círculo**.

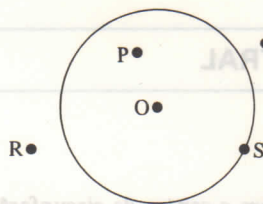
Circunferência U interior = círculo

VAMOS EXERCITAR

De acordo com a figura, complete as sentenças com o símbolo $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

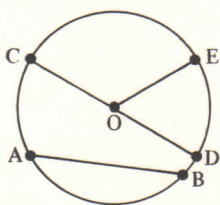
1)

A $\notin$ circunferência.
B $\notin$ circunferência.
C $\notin$ circunferência.
D $\in$ circunferência.
B $\in$ interior.
C $\notin$ interior.

$\overline{AB}$ $\not\subset$ circunferência.
$\overline{AB}$ $\subset$ círculo.
$\overline{BD}$ $\subset$ círculo.
$\overline{BC}$ $\not\subset$ círculo.

2)

P $\in$ círculo.
Q $\notin$ círculo.
$\overline{PO}$ $\subset$ interior.
R $\notin$ circunferência.
S $\notin$ interior.

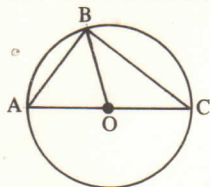
$\overline{RQ}$ $\not\subset$ círculo.
$\overline{OP}$ $\subset$ círculo.
$\overline{PQ}$ $\not\subset$ círculo.
$\overline{PS}$ $\subset$ círculo.
$\overline{OS}$ $\not\subset$ circunferência.

TRÊS SEGMENTOS ESPECIAIS: O RAIO, A CORDA E O DIÂMETRO

Observe na figura que:

- Os segmentos $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$ apresentam, como extremos, o centro e um ponto pertencente à circunferência. Estes segmentos recebem o nome de **raio**.
- O segmento $\overline{AB}$ apresenta, como extremos, pontos pertencentes à circunferência. Este segmento recebe o nome de **corda**.
- O segmento $\overline{CD}$ passa pelo centro e apresenta, como extremos, pontos pertencentes à circunferência. Este segmento chama-se **diâmetro**.

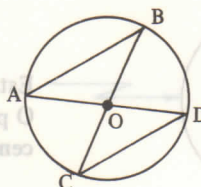
VAMOS EXERCITAR

Complete corretamente de acordo com a figura:

1)

Raios: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$

Cordas: $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$

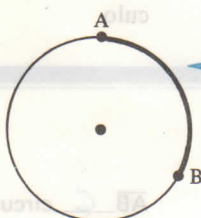
Diâmetro: $\overline{AC}$

2)

Raios: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$

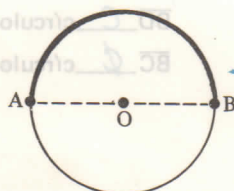
Cordas: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

Diâmetro: $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$

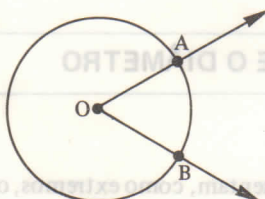
NOÇÃO DE ARCO

Consideremos uma circunferência e dois de seus pontos.

Esta parte da circunferência cujos extremos são os pontos A e B recebe o nome de arco.

Indicação: $\widehat{AB}$

Agora observe:

Este arco, cujos extremos A e B são também extremos de um diâmetro, recebe o nome de **semicircunferência.**

A MEDIDA DE UM ARCO: ÂNGULO CENTRAL

Observe a figura:

O ângulo AÔB cujo vértice coincide com o centro da circunferência recebe o nome de **ângulo central.**

Usando o seu transferidor, determine a medida do ângulo representado na figura:

m(AÔB) = 60°

Agora note:

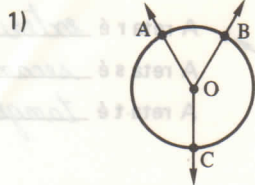
- A medida do arco é igual à medida do ângulo central correspondente.

Então podemos afirmar que:

m($\widehat{AB}$) = 60°

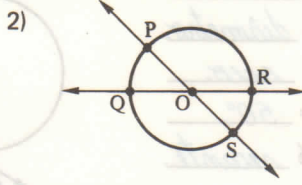
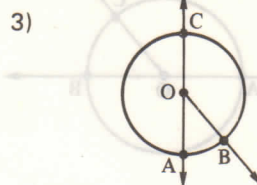
VAMOS EXERCITAR

Complete de acordo com a figura:

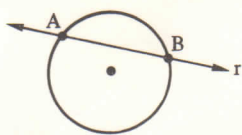
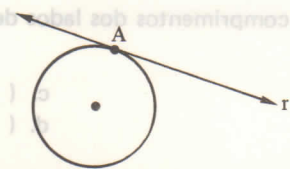
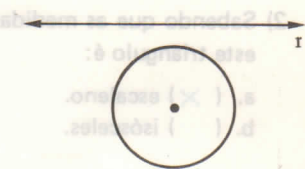
1)

m($\widehat{AB}$) = 60°
m($\widehat{BC}$) = 150°
m($\widehat{AC}$) = 150°

2)

m($\widehat{PQ}$) = 45°
m($\widehat{QS}$) = 135°

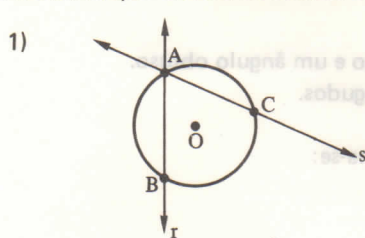
3)

m($\widehat{AB}$) = 40°
m($\widehat{BC}$) = 140°

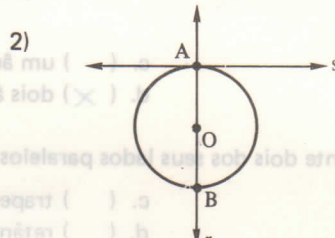
POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA

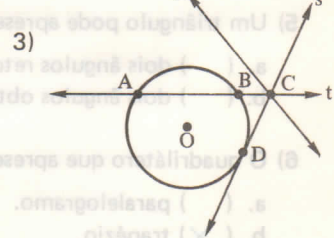
Veja as figuras:

A reta **r** e a circunferência possuem dois pontos comuns: **A** e **B**. Nesse caso a reta **r** é denominada **secante.**

A reta **r** e a circunferência possuem somente um ponto comum: **A.**
Nesse caso a reta **r** é denominada **tangente.**

A reta **r** e a circunferência não possuem nenhum ponto comum.
Nesse caso a reta **r** é **exterior.**

VAMOS EXERCITAR

Dê a denominação da reta de acordo com a figura:

1)

Reta r: secante
Reta s: secante

2)

Reta r: secante
Reta s: tangente

3)

Reta r: exterior
Reta s: tangente
Reta t: secante

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete as sentenças:

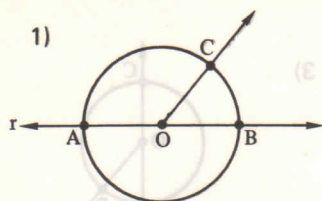
1) O segmento cujos extremos são dois pontos pertencentes à circunferência chama-se corda.

2) O segmento cujos extremos são o centro e um ponto pertencente à circunferência recebe o nome de raio.

3) Uma corda que passa pelo centro denomina-se diâmetro.

4) Se uma reta possui um único ponto comum com uma circunferência, então ela recebe o nome de tangente.

5) Uma reta exterior é aquela que não possui ponto comum com uma circunferência.

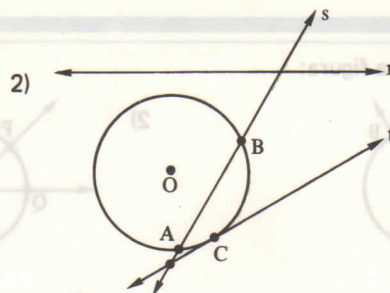
b) Complete conforme a figura:

1)

$\overline{OC}$ é um raio.

$\overline{AB}$ é um diâmetro.

$\widehat{AC}$ é um arco.

m($\widehat{BC}$) = 50°

A reta r é secante.

2)

$\overline{AB}$ é uma corda.

A reta r é exterior.

A reta s é secante.

A reta t é tangente.

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

Testes:

1) Um triângulo cujos ângulos medem 30°, 60° e 90° recebe o nome de triângulo:

a. ( ) acutângulo
b. ( ) obtusângulo.
c. (X) retângulo.
d. ( ) isósceles.

2) Sabendo que as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo são 7 m, 8 m e 12 m, podemos dizer que este triângulo é:

a. (X) escaleno.
b. ( ) isósceles.
c. ( ) eqüilátero.
d. ( ) eqüiângulo.

3) As medidas dos comprimentos de dois lados de um triângulo são 6 cm e 9 cm. A medida do terceiro lado não pode ser:

a. ( ) 10 cm
b. (X) 15 cm
c. ( ) 13 cm
d. ( ) 12 cm

4) Um dos lados de um triângulo mede 11 dm. As medidas dos outros dois lados podem ser:

a. (X) 4 dm e 8 dm
b. ( ) 3 dm e 7 dm
c. ( ) 4 dm e 6 dm
d. ( ) 3 dm e 8 dm

5) Um triângulo pode apresentar:

a. ( ) dois ângulos retos.
b. ( ) dois ângulos obtusos.
c. ( ) um ângulo reto e um ângulo obtuso.
d. (X) dois ângulos agudos.

6) O quadrilátero que apresenta somente dois dos seus lados paralelos denomina-se:

a. ( ) paralelogramo.
b. (X) trapézio.
c. ( ) trapezóide.
d. ( ) retângulo.

7) O paralelogramo cujos lados são congruentes e cujos ângulos não são retos recebe o nome de:

a. ( ) retângulo.
b. ( ) trapézio.
c. (X) losango.
d. ( ) quadrado.

8) O paralelogramo cujos lados são congruentes e cujos ângulos são retos denomina-se:

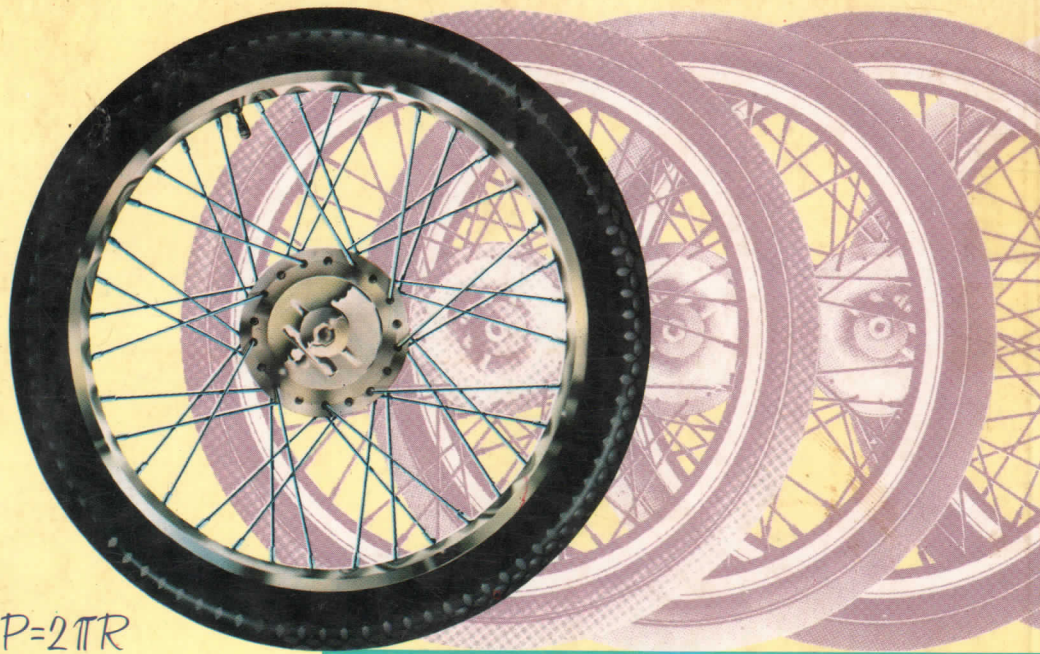
a. ( ) retângulo.
b. ( ) trapézio.
c. ( ) losango.
d. (X) quadrado.

9) O segmento de reta cujos extremos pertencem a uma circunferência denomina-se:

a. ( ) raio.
b. (X) corda.
c. ( ) arco.
d. ( ) diâmetro.

10) Uma reta que apresenta um único ponto comum com uma circunferência recebe a denominação de reta:

a. ( ) exterior.
b. ( ) secante.
c. (X) tangente.
d. ( ) transversal.

Impresso por W. Roth & Cia. Ltda.

P=2πR
1m
1m
Metro quadrado:
unidade fundamental de
medida de área, correspondente
à área de um quadrado,
cuja medida do comprimento
do lado é de 1 metro.